GEODÄSIE. ANLEITUNG ZUM GEOMETRISCHEN THEILEN DER GRUNDSTÜCKE...

Guido SCHREIBER





GEODÄSIE.

ANLEITUNG

zum

geometrischen Theilen der Grundstücke.

Von

Professor Guido Schreiber,

ordentlichem öffentlichen Lehrer der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe,
und Examinator der Geometer im Grossherzogthum Baden.

Mit 54 in den Text gedruckten Figuren in Holzschnitt.

MANNHEIM.
Verlagsbuchhandlung von Friedrich Bassermann.

1857.

GEODÄSIE.

ANLEITUNG

zum

geometrischen Theilen der Grundstücke.

Nolite facere iniquum . . . in pondere in mensura.
Levit. 19. 35.

Von

Professor Guido Schreiber,

vormaligem öffentlichen Lehrer der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe,
und Examinator der Geometer im Grossherzogthum Baden.

Mit 54 in den Text gedruckten Figuren in Holzschnitt.

Mannheim.

Verlagsbuchhandlung von Friedrich Bassermann.

1857.



Buchdruckerei von MALSCH & VOGEL in Karlsruhe.

Vorwort.

Unter allen mathematischen Disciplinen sind es besonders die verschiedenen Theile der Feldmesskunst, welche von Zeit zu Zeit einer Umarbeitung bedurft haben. Denn das Mathematische allein ist hier nicht maassgebend, vielmehr sind diese praktisch-theoretischen Lehren und Methoden abhängig von den Fortschritten und Veränderungen der Instrumental - Mechanik und sonst noch von manchen Aeusserlichkeiten. Aber auch der Vortrag des rein Mathematischen hat in den letzten dreissig Jahren manche Umbildungen erfahren. Denn obwohl gestützt und getragen von der unerschütterlichen Grundlage der alten Synthesis und Analysis kann dieser Vortrag sich jetzt doch freier bewegen, allgemeinere Gesichtspunkte vesthalten. Dies sind die leitenden Ansichten gewesen bei gegenwärtiger Arbeit, welche übrigens das *Wieland'sche* „neun Jahre im Pult" bereits hinter sich hat.

Der Titel des Buches sollte anfänglich nur so lauten, wie nach der ersten Zeile des vorstehenden. Der Herr Verleger wünschte aber, in Berücksichtigung buchhändlerischer Verhältnisse, ein allgemeineres Hauptwort an der Spitze. Ich hatte „Geotomie“ oder „Geodäsie“ vorgeschlagen. Man entschied sich für lezteres, das Wort in seiner buchstäblichen Bedeutung nehmend. So bekam das Kind den Namen erst während seiner typographischen Geburt, und ich glaube dies hier anführen zu müssen, weil, ohne solchen Umstand, gleich der erste Satz auf der ersten Seite eine etwas veränderte Fassung würde erhalten haben.

Karlsruhe, im März 1857.

Der Verfasser.

v

INHALT.

Seite

Allgemeine Ansicht des Gegenstandes 1

Erstes Buch.

Theilungen durch Construction.

§. 1. Zwei vorläufige und fundamentale Constructionen 6

Theilung des Viereckes.

§. 2. Theilung des Paralleltrapezes 7

§. 3. Theilung des unregelmässigen Viereckes 10

§. 4. Construction, verbunden mit einiger Rechnung 14

Zweites Buch.

Theilung durch Rechnung.

§. 5. Das System der rechtwinklichen Coordinaten 22

§. 6. Begriff von Projection 24

§. 7. Coordinaten und Flächenräume 25

§. 8 u. 9. Trigonometrische Beziehungen zwischen polygonalen Figuren und ihren Coordinaten 27

§. 10. Ableitung der Coordinaten geodätischer Figuren 35

§. 11. Uebergang von einem Coordinatensystem zum andern 39

§. 12. Zur Geschichte der Trigonometrie 44

§. 13, 14 u. 15. Fünf Uebungsbeispiele zur Anwendung des Vorhergehenden 49

A. Parallele Theilung.

§. 16. Theilung des Viereckes durch gerade Linien, welche auf der Abscissenaxe senkrecht stehen 73

Hieher gehörige Fundamentalaufgabe. Die Grundlinie als Axe genommen 74

§. 17. Zwei Beispiele 76

§. 18. Die Axe hat eine beliebige Richtung 81

§. 19. Die Theilungslinien sollen der Abscissenaxe parallel laufen . . 85

Drei Beispiele.

Seite

§. 20. Ein Viereck, dessen Coordinaten sich auf die Grundlinien beziehen, soll getheilt werden durch Linien, welche einer Nebenseite parallel gehen 100
Ein Beispiel.
§. 21. Unter gleicher Voraussetzung sollen die Theilungslinien der Gegenseite parallel laufen 109
§. 22. Die Theilungslinien sollen einer beliebigen Richtung parallel liegen 113

Symmetrische Theilung.

§. 23. Begriff hievon 116
§. 24. Drei Beispiele 119
§. 25. Symmetrische Theilung bei gebrochenen Gränzlinien 138

Theilung aus gegebenen Punkten.

§. 26. Bei einem Viereck sind die Theilpunkte auf einer Nebenseite gegeben 147
Zweitens auf der Grundlinie oder ihr gegenüber. 148
§. 27. Zwei Beispiele 149
§. 28. Die Theilungslinie soll durch einen Punkt gehen, welcher ausserhalb der Gränze liegt 160
§ 29. Anwendung gebrochener Theilungslinien. 164

Drittes Buch.

Einige besondere Fälle.

§. 30. Ein Viereck soll durch zwei gerade Theilungslinien in vier Stücke von bestimmter Grösse zerlegt werden 167
Ein Viereck soll dergestalt in zwei Theile von gegebener Grösse zerlegt werden, dass die Theilungslinie ein Minimum an Länge habe 171
§. 31. Theilung bei ungleicher Güte des Bodens 174
§. 32. Vom Theilen eines grösseren Verbandes von Grundstücken . . 178
Das Zusammenlegen oder Renoviren einer Markung 182
Ein Wort über die Kosten hiebei 184

Allgemeine Ansicht des Gegenstandes.

Grundstücke nach bestimmtem Grössenverhältnisse zu theilen ist sicher eine der ältesten geodätischen Aufgaben, hat doch die Wissenschaft „Geodäsie" selbst ihren Namen davon.

Anlässe zu solcher Theilung werden bei uns stets und überall vorhanden seyn: der Stand unserer Gesetzgebung, unserer Land- und Forstwirthschaft führt dies mit sich.

Es können bei diesem Geschäft mancherlei, selbst verwickelte *Vorfragen* zur Entscheidung vorliegen, Fragen über Eigenthums-Rechte und Ansprüche, über Güte und Wert des Bodens u. s. w., diese aber mögen den Geometer, als solchen, nur in sofern berühren, als etwa die Frage über das Was und Wie der Theilung davon abhängig ist.

Entschieden aber müssen diese Fragen seyn, bevor der Geometer sein Geschäft beginnen kann, denn es wäre zum Beispiel unmöglich, einen Flächenraum richtig zu theilen, wenn seine Grenzen nicht unzweifelhaft bestimmt stünden.

Wo in geometrischem Sinne von der *Grösse* eines Grundstückes die Rede, ist stets das Flächenmaass der natürlichen Horizontalprojection des Stückes gemeint.

Dieser Flächengehalt bildet, wenn auch den bedeutendsten, doch stets nur *einen* Factor von dem Werte des Grundstückes. Lage in Bezug auf die Himmelsgegenden und übrigen Oertlichkeiten, Neigung gegen den Horizont, Höhe über dem Meere, Beschaffenheit des Bodens u. s. w., das sind die übrigen Factoren, aus deren Gesammtproduct der *Wert* des Stückes hervorgeht.

In den einfacheren Fällen unserer Aufgabe sind die letztgenannten Factoren oder Momente für jeden Punkt des zu theilenden Grundstückes gleich, d. h. das Stück hat überall den gleichen Werth oder, wo es sich um eine ausgedehnte Flächenmasse handelt, wird angenommen, diese Masse sei vorläufig schon durch genaue Gränzen in solche grössere Abtheilungen zerlegt worden, dass jede einzelne in all ihren Punkten wieder den gleichen Bodenwerth habe.

Da nun die Gränzen derjenigen Stücke, in welche das Ganze, oder die grösseren Abtheilungen desselben getheilt werden sollen, immer durch gerade Linien zu bilden sind, so lässt sich die Aufgabe, wovon in diesem einfacheren Falle die Rede, also auszudrücken:

„eine horizontale Fläche soll durch gerade Linien in Stücke
„von bestimmten Grössen zerlegt werden."

Hier nun liegt eine rein geometrische Aufgabe vor, aber eine unbestimmte Aufgabe, weil sie offenbar auf sehr vielerlei Weisen gelöst werden könnte.

Bedingungen nun, welche die Aufgabe näher bestimmen, sind mehrere in der Natur der Sache gegründet: — es wird z. B. stets verlangt werden, dass die einzelnen Theilstücke eine Gestalt und gegenseitige Lage erhalten, welche den Anbau begünstigen; man wird wünschen müssen, dass jedes Stück einen freien Zugang habe, dass also wenigstens eine Seite desselben auf einen Weg oder fahrbaren Rain u. dgl. stosse; es wird ferner verlangt werden, dass kein Besitzer durch die Feldarbeit des Nachbars auf seinem Eigenthum behelliget werde.

Bei Feldstücken wird man darum zu vermeiden haben, dass durch die Lage der Theilungslinien sogenannte Anwende oder Anwendel entstehen, d. h. Stücke, welche ihrer Länge nach unmittelbar an die Köpfe oder schmalen Enden anderer Aecker stossen, weil auf ersterem dann das Umwenden der Pflüge stattfinden müsste.

Sind mit dem Besitze der Gränze Vortheile oder Lasten verbunden, z. B. Bewässerungsrechte, oder aber die Pflicht des Unterhaltes einer gemeinsamen Einfriedigung, eines gemeinsamen Wasserbaues u. dgl., wird wohl verlangt werden, dass der Antheil eines jeden Interessenten an dieser Gränze der Grösse seines daran stossenden Grundstückes proportional genommen werde u. s. w.

Was ferner die Gestalt der einzelnen Theilstücke anlangt, so wird die thunlichste Annäherung an das regelmässige Viereck zu erstreben, jede Theilungsgränze also durch eine einzige gerade Linie zu bilden sein.

Wo die angeführten äusseren Verhältnisse noch nicht hinreichen, die beiläufige Lage der Theilungslinie festzusetzen, mag begreiflich nur eine vorgängige Vereinbarung unter den Interessenten darüber entscheiden.

Zusammengesetzter wird die Aufgabe der geodätischen Theilung durch gewisse erschwerende Bedingungen, welchen die Lage der Theilungslinien Genüge leisten sollen, so wie durch das Vorhandensein eines ungleichen Bodenwertes in einem und demselben Stücke.

Was nun die *geometrische Methode* anlangt, nach welcher geodätische Theilungen auszuführen sind, und welche den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung bilden, so bietet sich hier, wie in allen ähnlichen Fällen, entweder der Weg der Rechnung dar, oder jener der graphischen Konstruktion, oder endlich eine Verbindung von beiden. Welcher von den dreien am bequemsten zum Ziele führe, hängt von den jeweiligen Umständen ab, freilich seit *Delambre's* Ausspruch: *la meilleure construction, c'est le calcul*, wird man in fast allen Lehrbüchern über diesen Gegenstand dem Satze begegnen, dass die Rechnung schärfere Resultate gäbe, als die Zeichnung, daher jene dieser vorzuziehen sey. In geodätischen Dingen ist *Delambre* zweifelsohne eine Auctorität, allein beim Lichte besehen erscheint sein obiges Wort doch nur

als eine jener geistreich klingenden Phrasen, welche den Franzosen so geläufig sind; denn bekanntlich gibt es nur *eine* mathematische Richtigkeit und die Construction als solche ist an sich so richtig, wie die analytische Rechnung. Allerdings, wenn man eine geometrische Construction vermittelst Zirkel und Richtscheit graphisch ausführen will, um ihr Endergebniss mit Hilfe des verjüngten Maassstabes in Zahlenwerten zu erhalten, so kommen hierbei die unvermeidlichen Unsicherheiten des Zeichnens und Messens in's Spiel und jener Zahlenwert wird in vielen Fällen vermittelst der Rechnung schärfer gefunden werden.

Allein bei einer Würdigung des vergleichungsweisen Wertes beider Methoden, darf man den wesentlichen Umstand nicht übersehen, dass jedwede geodätische Rechnung wie Construction mit Elementen oder Angaben geführt wird, welche niemals absolut, sondern nur innerhalb gewisser Gränzen richtig sind: die Linien auf so und so viel Prozente ihrer Länge, die Winkel durchschnittlich auf so und so viel Secunden oder Minuten des Kreisquadranten. Aber aus unsicheren Bestimmungsstücken folgt, man mag rechnen oder zeichnen, ein Ergebniss, dessen Genauigkeit zwischen engern oder weitern Gränzen liegen wird, je nach dem Einflusse jener unsichern Elemente. So bietet denn auch, bei geodätischen Theilungen, die Construction unter Umständen erhebliche Vortheile dar. In manchen Fällen lässt sie sich, ohne vorhergegangene Zimmerarbeit unmittelbar auf dem Felde ausführen, und dies bleibt doch immer das Wünschenswertheste. Oft auch bietet die Zeichnung eigenthümliche Verfahrungsarten, wodurch die obengenannten unvermeidlichen Unsicherheiten keinen so merklichen Einfluss zu gewinnen vermögen, als es bei Anwendung der Rechnung geschehen würde. Endlich und nicht sehr selten wird der Fall sich darstellen, dass man die Elemente zur Ausführung einer geodätischen Theilung graphisch von einem vorhandenen Risse zu entnehmen hat, und hier wird es meist geraten seyn, die ganze Arbeit auf diesem Plane selbst auszuführen.

Es sey dies hier gesagt, damit der angehende Geodät sein Urtheil über den Wert dieser oder jener Methode durch eigene Erfahrung festzustellen suche; damit er nicht einseitig von der Einen zu viel, von der Andern zu wenig erwarte. Bei all seinen Arbeiten soll er die *vorgeschriebene* Genauigkeit erreichen; geht er unnöthig weiter, so kommt dies Niemanden zu gut, im Gegentheil hat er den überflüssigen Aufwand an Mühe und Zeit als einen Verlust zu betrachten für sich selber, oder für Denjenigen, in dessen Auftrag er arbeitet.

Meistens wird ein Geometer ausser Verantwortung seyn, wenn er seine Flächenräume auf $^1/_2$ Prozent genau angibt, obwohl bei Bauplätzen und anderem Gelände von hohem Werth $^1/_{10}$ Prozent des Inhaltes noch verbürgt werden muss.

Soll ein grösseres Grundstück von mittlerem Werte behufs zeitweiliger Verpachtung in Parzellen getheilt werden, dürfte eine Arbeit, welche 1 Prozent verbürgt, hinreichend genau scheinen; während etwa die Abtheilung eines Forstes in Schläge keine höhere Genauigkeit als von 2, je nach Umständen selbst nur von 5 Prozenten erfordern wird u. s. w.

Das Geschäft einer geodätischen Theilung wird für den Geometer beendet sein, wenn erstlich die Theilungslinien ausgepflöckt, nach Umständen auch versteint und die neuen Furchen durchgepflügt sind, und wenn er zweitens über die Arbeit einen Messbrief oder jene bezüglichen Documente ausgefertigt hat, welche von den landesgiltigen Verordnungen hierüber gefordert werden.

Erstes Buch.

Theilungen durch Construction.

§. 1.

Von allem dem, was sich in Lehrbüchern, Beispielsammlungen etc. hierüber findet, lässt sich bei weitem nur der geringere Theil für die Ausübung benützen, nämlich die *aller einfachsten* Constructionen. Denn nur diejenigen können zulässig erscheinen, wobei jeder Punkt durch ganz wenige sicher auszuführende Operationen bestimmt wird. Nachfolgend die wichtigsten hievon. Sie beruhen fast alle auf dem Satze, dass Dreiecke, welche einerlei Grundlinien haben, und deren Scheitel auf einer Parallelen zu dieser Grundlinie liegen, inhaltsgleich sind.

Voraus zwei allgemeine, gewissermassen fundamentale Constructionen.

Erste Aufgabe. *Eine gebrochene Gränzlinie in eine gerade zu verwandeln.*

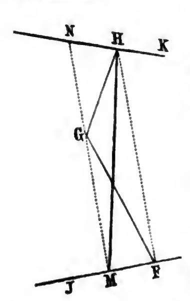


Fig. 1. F J, N H K seien die äussern Gränzen zweier aneinander stossenden Grundstücke, und die gebrochene Linie F G H ihre gemeinsame innere Gränze, welch letztere, ohne Veränderung des Inhaltes der Grundstücke, in eine gerade Linie verwandelt werden soll.

Ausführung. Zu F H ziehet durch G eine Parallele: sie schneidet auf J F den zu H gehörigen Gränzpunkt M ab, oder aber auf H K den zu F gehörigen Gränzpunkt N, weil in beiden Fällen das durch die Hilfslinie F H abgetrennte und das dafür hinzugefügte Dreieck inhaltsgleich sind.

Zweite Aufgabe. *Die Gränze zweier an einander stossenden Grundstücke durch einen gegebenen Punkt zu legen.*

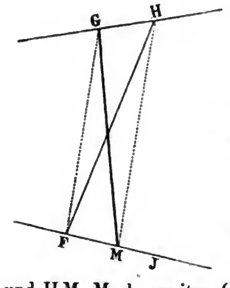


Fig. 2. J F und G H seien, wie vorhin, die äusseren Gränzen, F H die Scheidelinie von zwei benachbarten Grundstücken. G sey der Punkt, durch welchen diese Scheidelinie nun gelegt werden soll, ohne den Inhalt der Grundstücke zu ändern.

Ausführung. Betrachtet F H G als gebrochene Gränze, dann findet ihr, wie zuvor, mittelst der Parallelen F G und H M, M als zweiten Gränzpunkt.

Theilung des Vierecks.

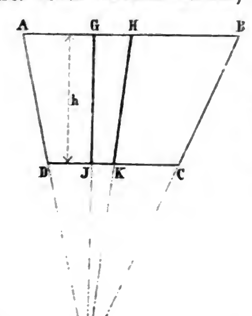
§. 2.

Vorbemerkung. Wir geben keine Construction für die graphische Theilung des Dreieckes, weil keine derselben den Forderungen entspricht, welche wir oben gestellt.

Theilung des Parallel-Trapezes.

Sobald die Lage der Theilungslinien freigestellt ist, wird man sie auf die parallelen Seiten stossen lassen, weil es dann nur von Nöthen, diese Parallelseiten im Verhältnisse der abzuschneidenden Flächenstücke einzutheilen. Denn denkt man sich das Trapez zum Dreieck verlängert, so werden in obiger Unterstellung alle verlängerten Theilungslinien nach der Spitze laufen. Man sieht dann, dass die ganzen Dreiecke und die Ergänzungsstücke sich verhalten, wie die Grundlinien, dass daher auch die Unterschiede von ihnen, nämlich die Vierecke in demselben Verhältniss stehen werden.

Beispiel. Fig. 3. A B = 15 Ruthen, C D = 10,38, die Höhe h = 14,4, also Inhalt J = 182,736. Das Grundstück soll unter drei Erben vertheilt werden, deren Ansprüche gleich wie 1:2:3 sich verhalten, welche also der Ordnung nach $^1/_6$, $^2/_6$, $^3/_6$ des Ganzen zu erhalten haben. In demselben Verhältniss ist sofort auch die obere und untere Gränze zu theilen.



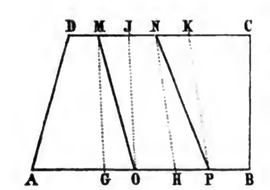
	Inhalt.	kleinere Seite.	grössere Seite.
$^1/_6$ =	30,456	1,73	2,5
$^2/_6$ =	60,912	3,46	5,0
$^3/_6$ =	91,368	5,19	7,5
Summe	182,736	10,38	15,0.

Die Breiten der Köpfe können nun aufgemessen und somit die Furchen abgepflöckt werden. Was die Ordnung der Theile anlangt, dürfte, bei sehr ungleichen Winkeln an der Grundlinie, die Billigkeit verlangen, den kleinern Theil in die Mitte zu verlegen, weil er an den Enden vielleicht zu schmal und zur Benützung ungünstig ausfiele.

Anmerkung. Auf den Inhalt kommt es bei dieser Theilung nur in so fern an, als es aus äusseren Gründen zu wissen nöthig seyn kann, was die Interessenten erhalten haben.

Zweite Aufgabe. *Ein Parallel-Trapez soll aus gegebenen Punkten eingetheilt werden.*

Angaben. Das Viereck (Fig. 4) habe folgende Maasse: Grundlinie A B = 33,14; parallele Gegenseite D C = 27,40; perpendikuläre Seite B C = 20,20. Hieraus Inhalt *J* = 611,45 Quadratruthen. Dieses Viereck soll in drei gleiche Theile zerlegt werden; aus gewissen Gründen wird jedoch verlangt, dass die Theilungs-



linien durch die Punkte M und N gehen, welche der Art auf der schmäleren Parallelseite gegeben sind, dass man hat: D M = 4,76; D N = 13,00.

Ausführung. Theilet jede der Parallelseiten in drei gleiche Theile. J, K und G, H seien die Theilpunkte auf der oberen, wie unteren Seite.

Verleget die Theilungslinien, welche man sich durch J und G, durch K und H gehend zu denken hat, der Art, dass sie durch die Punkte M und N laufen. (§. 1. Aufgabe 2.) Es finden sich hiedurch die untern Theilpunkte O und P.

Zusätze. Es blieben schliesslich noch die Entfernungen A O, A P dem Plane zu entnehmen, um dieselben auf dem Felde in der gleichen Richtung und Folge aufmessen zu können. Die Messung aber ergab:

A O = 15,44	A P = 27,41	daher	A P = 27,40
O B = 17,70	P B = 5,75	verbessert	P B = 5,74
A B = 33,14	A B = 33,16		A B = 33,14

Man mass nämlich zu jedem Abschnitte auch den ergänzenden Theil. Die erste Summe traf genau zu; die zweite erwies sich um 2 Zolle zu gross und man musste desshalb von jedem der beiden Posten 1 Zoll in Abrechnung bringen.

Weil die verschiedenen Parallel-Trapeze der Figur 4 von gleicher Höhe, verhalten sie sich, wie die Summen ihrer Parallelseiten. Dieser Satz liefert eine einfache Proberechnung, denn weil A P N D = 2 A O M D seyn soll, muss man auch erhalten A P + D N = 2 (A O + M D). Nach den oben gegebenen und gefundenen Zahlenwerten muss sich also ergeben:

$$2\,(15{,}44 + 4{,}76) = (27{,}40 + 13{,}00) = 40.40.$$

Macht man aber die weitere Probe und multiplicirt diese Summe durch den Wert des Perpendikels B C, ergibt sich:

$^1/_2$ (40,40) (20,20) = 408,04 anstatt 407,64 = $^2/_3$ *J*.

Aus dem angewendeten Satze folgt aber auch:

$$A\,O = \frac{^2/_3\,J}{B\,C} - D\,M \text{ oder } A\,O = \frac{2\,.\,203{,}82}{20{,}20} = 4{,}76 = 15{,}42$$

so wie $A\,P = \frac{4\,.\,203{,}82}{20{,}20} - 13{,}00 = 27{,}36.$

Diese letzteren leichten Rechnungen zeigen, dass die Resultate der Construction und der ersten Proberechnung, obgleich völlig übereinstimmend, dennoch nicht ganz richtig waren. Allein in der Gleichheit der zwei Resultate darf man weiter nichts sehen, als das Uebereinstimmen zweier Zeugnisse, und dies gilt allerdings bisweilen in unserm geschriebenen Rechte, aber sonst nirgends, für den völligen Beweis der Wahrheit. Worin im vorliegenden Falle der Irrthum gelegen, ist leicht ersichtlich: die praktische Messung gab nämlich A O um 2 Zoll, A P um 4 Zoll zu gross. Die Fehler waren also den Flächenräumen proportional und konnten sich darum bei dem angewendeten Rechnungsverfahren nicht zeigen. Im Uebrigen beträgt der Einfluss jener Fehler auf den abzutheilenden Flächeninhalt nur $^1/_{10}$ Prozent desselben, bleibt also rein unerheblich.

Zweiter Zusatz. Sollten bei vorstehender Aufgabe die Theile nicht unter sich gleich werden, vielmehr in anderem Verhältnisse stehen, so hätte man vorerst die Parallelseiten in J, K, G, H nach dem gleichen Verhältniss zu theilen gehabt.

Theilung des unregelmäßigen Vierecks.

§. 3.

Angabe. A, B, C, D *Fig.* **5** *sei das Viereck.*

Erste Methode.

Verwandelt das Viereck in ein Dreieck, indem ihr als Grundlinie eine der zwei Seiten wählet, auf welche die Theilungslinien

stossen und welche hiezu verlängert werden muss. Am zweckmässigsten dient die kürzere dieser Seiten. Die Grundlinie A Z des inhaltsgleichen Dreieckes bestimmt sich durch Ziehen von C Z parallel zur Diagonalen D B. Theilet diese Grundlinie proportional, wie das Viereck getheilt werden soll; wir wollen der Kürze wegen gleiche Theile annehmen, und zwar vier. V, W, X sollen die Theilpunkte sein. Die Grundlinie A B des

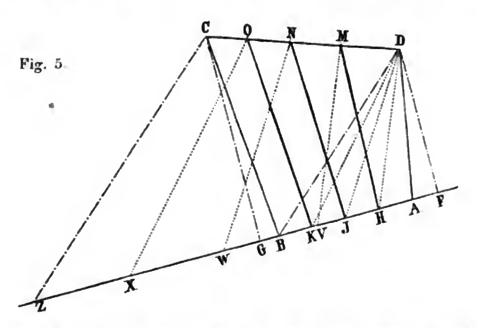


Fig. 5

Viereckes theilet eben so, oder wie es sonst passend scheinen mag. H, J, K seien deren Theilpunkte. Denkt man aus D nach dem ersten Theilungspunkt die Hilfslinie D V gezogen, so erscheint das Dreieck A D V als ein Viertheil des Ganzen, und wenn man zu D H durch V eine Parallele führt, welche die Seite C D in M schneidet, so ist A D M H ein Viertheil des Viereckes. Aehnlicherweise bestimmen sich die übrigen Theilpunkte der oberen Vierecksseite N, O.

Erläuterung. Dadurch, dass man den Scheitel des inhaltsgleichen Dreieckes nach D verlegte, wurden die Punkte M N etc. durch bessere *) Schnitte bestimmt, als wenn C zum Scheitel

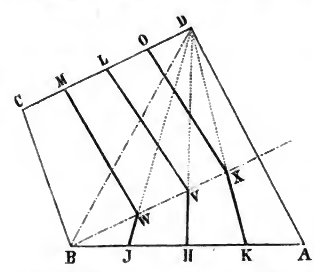
---

*) Einen *guten Schnitt* nennt man bekanntlich in der praktischen Geometrie diejenige Durchkreuzung zweier Linien, welche unter einem rechten Winkel

gewählt worden wäre. Allein die Linie A Z wird dafür auch grösser, so dass die letzten Theilungspunkte W X oft weit weg fallen. Immer jedoch wird es räthlich seyn, die Länge A Z nicht graphisch zu bestimmen, sondern dadurch, dass der Inhalt des Viereckes durch den halben Perpendikel D F oder C G dividirt wird. Die als Quotient gefundene Länge theilt man nach dem gegebenen Verhältnisse und trägt so viel Theilstriche V W . . . auf, als der Raum der Zeichnung zulässt. Die etwa noch fehlenden Punkte O etc. bestimmt man dann, indem C als Scheitel des Hilfsdreieckes angenommen wird.

Zweite Methode. Fig. 6.

Theilet die Gegenseiten A B, C D, auf welche die Theilungslinien stossen sollen, in demselben Verhältniss, wie die Theile werden sollen; also gleich bei gleichen Theilen. H, J, K L, M, O seyen die Theilpunkte. Durch ein Eck, B z. B., ziehet eine Parallele mit der Gegenseite C D (immer so, dass diese Parallele in's Innere des Viereckes falle), ziehet D H, D J, . . . die Durchschnitte V, W . . . dieser Hilfslinien und der Parallelen verbindet mit L, M, . . . und H V L, J W M, K X O werden die Theilungslinien seyn; denn für vier gleiche Theile z. B., sieht man also gleich, dass A D K = ¼ A D B weil beides Drei-



---

stattfindet, oder doch unter einem nicht merklich schiefen Winkel. In letzterem Falle erscheint der wahre Ort des Durchschnittes nicht nur physisch schwer zu erkennen, sondern die mindeste Unrichtigkeit in der Lage einer der beiden Linien muss eine starke Verschiebung des Schnittpunktes hervorbringen.

ecke von gleicher Höhe und proportionaler Basis. Ebenso ist DXO = ¼ DBC, also DAKXO = ¼ ABCD.

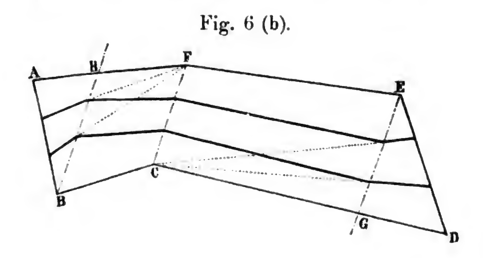
Wie die gebrochenen Theilungslinien in gerade verwandelt werden können, ward in §. 1 gesagt.

Erläuterungen. Diese Methode hat das Gute, dass alle Linien innerhalb der zu theilenden Fläche bleiben; sie eignet sich desshalb auch zu unmittelbarer Anwendung auf dem Felde. Die Schnitte bei W, V, X werden am schärfsten, wenn man die Parallele durch ein Eck der schmälern von beiden Gegenseiten zieht. D liegt immer diesem Ecke schräg gegenüber.

Hier, wie bei voriger Constructionsart, waren die Punkte auf einer Viereckseite, z. B. die K, H, J, ... im Voraus bestimmt; es mussten also, nach der Construction auf dem Papiere nur noch die Entfernungen DO, DL, DM, ... (zur Bewahrheitung auch CM, CL, ...) mittelst des verjüngten Maassstabes gemessen werden. Zur Bestätigung berechnet man nach vollendeter Theilung einige der erhaltenen Parzellen.

Zusatz. Wie vorstehende Theilungsmethode auf Grundstücke von mehr zusammengesetzter Gestalt sich anwenden liesse, wird, ohne weitere Bemerkung, als diejenige, dass BH, EG der Diagonalen CF parallel gezogen wurden, aus Fig. 6 (b) zu entnehmen sein.

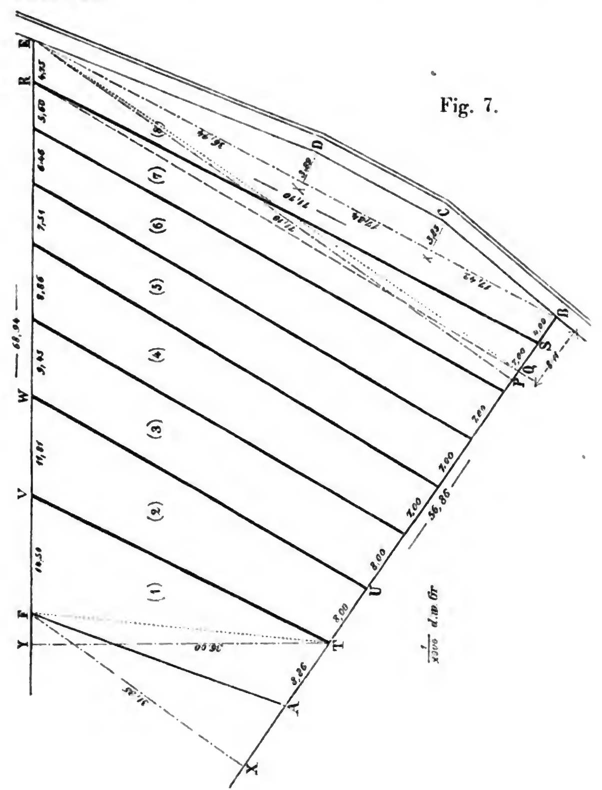
Fig. 6 (b).



Fortsetzung.

§. 4.

Bisweilen lässt sich mit Vortheil Construction und einige Rechnung verbinden, wie dies an nachfolgendem Beispiele gezeigt werden soll.



Das Polygon ABCDEF, Fig. 7, war, als ein Theil einer grösseren Vermessung, im Massstab von $1/_{1000}$ verzeichnet.

Für das Verständniss genügt die nebenstehende Reduction auf die Hälfte jener Grösse. Zur Theilung dieses Flächenraumes musste der Weg der Rechnung ungeeignet erscheinen, weil alle Elemente für dieselbe mit Hilfe des verjüngten Massstabes der Zeichnung hätten entnommen werden müssen; auch die reine Construction war misslich wegen der sehr ungleichen Seiten der Figur, denn diese hätten entweder schiefe und unsichere Durchschnitte der Constructionslinien, oder sehr weite Verlängerungen derselben herbeigeführt. Man hat daher folgenden Weg eingeschlagen.

Der Inhalt des Stückes betrug 3261,7 Quadratruthen, es sollte, zur Verpachtung, in einzelne Morgen zu 400 Ruthen getheilt werden. Dies gab also acht Loose, deren einem man die überzähligen 61,7 Quadratruthen beischlug. Wegen der Krümmung bei BCDE gab man diesem Zuschlag dem hier anstossenden Stücke, dessen Grösse somit als Loos Nr. 8 auf 461,7 Quadratruthen gesetzt wurde. Der Flächenraum zwischen der Geraden BE und dem Wege beträgt 173,1 Ruthen, nach Abzug von diesem blieb ein reines Viereck ABEF von 3088,6 Ruthen; von diesem war für das Loos Nr. 8 vorerst ein Viereck von $461{,}7 - 173{,}1 = 288{,}6$ Ruthen abzuschneiden, der Ueberrest mit 2800 Ruthen aber in 7 gleiche Theile zu theilen.

Bestimmung des Looses Nr. 8.

Man hat die genannten 288,6 Ruthen in ein Dreieck verwandelt, dessen Höhe der Perpendikel $EP = 71{,}1$; daher die Grundlinie des Dreieckes $= 2 \times 288{,}6 : 71{,}1 = 8{,}12$, welche Grösse von B nach Q getragen worden. Dem Stücke sofort eine passendere Gestalt zu geben, war man in dem Falle, nach Anleitung der zweiten Aufgabe des §. 1 sich zu benehmen.

Nach einem ersten Versuche fand man, dass die Gestalt der Parzelle zweckmässig ausfalle, wenn man ihr eine untere Breite

von 4° gäbe. Diese 4° wurden von B nach S getragen, durch Q eine Parallele zu E S gezogen, welche auf F E das Eck R abschnitt. Durch Messen von R E (auch R F) fand sich diese Länge gleich 4°,75. Nachdem die Theilungslinie aufgetragen und die nöthigen Maasse zur Berechnung von B E R S entnommen waren, ergab sich der Inhalt davon bis auf eine unerhebliche Differenz als richtig.

Bestimmung der Loose 1 — 7.

Eine vorläufige Theilung, nach der zweiten Methode des vorigen Paragraphen, zeigte, dass die Gestalt der Stücke nicht günstig ausfalle, wenn man die Köpfe längs der Linie A B gleich machte. Die Länge dieser Linien, nach Abzug der 4 Ruthen von B bis S, ist 52,86; durch 7 getheilt, gibt 7 zum Quotienten. Den Rest 3,86 hat man, in der Weise, wie die Figur zeigt, den drei ersten Stücken zugeschlagen. T, U, ... waren demnach die festgelegten untern Theilungspunkte.

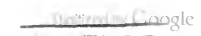
Jede Parzelle betrachtete man nun als aus zwei Dreiecken bestehend; Nr. 1 z. B., gebildet aus A T F und T F V. Der Perpendikel F X fand sich, nach dem verjüngten Massstabe = 31,35, daher

	A T F = ½ × 8,86 × 31,35 =	138,88
also	T V F = ... =	261,12
	Parcellen (1) . . . . =	400,00.

Nun gab sich der Perpendikel T Y nach dem Massstab des Planes = 36,0 und hieraus

$$F V = 2 \times 261{,}12 : 36{,}0 = 14{,}50$$

Auf gleiche Weise sind die oberen Breiten der übrigen Stücke berechnet worden. Das eine Dreieck von den zweien, woraus das Stück besteht, berechnete man aus seiner Grundlinie und seiner Höhe, welche besser auf dem Plan zu messen war. Diesen Inhalt von 400 Quadratruthen abgezogen, gab als Rest das Ergänzungsdreieck, dessen Höhe wieder dem Plan entnommen ward;



als Quotienten aus dieser Höhe in den doppelten Inhalt fand man die gesuchte obere Breite.

Die Summe aller Breiten musste der Länge von F E gleich werden, sie traf vollkommen zu. Obwohl dies nur als Zufall betrachtet werden darf, so konnte der Unterschied doch in keinem Falle bedeutend erscheinen, weil die fraglichen Quotienten durchaus kleiner gewesen, als die gebrauchten Divisoren, d. h. die gemessenen Perpendikel, und weil desshalb die Unsicherheiten im Gebrauche des verjüngten Massstabes nur einen ganz unmerklichen Einfluss auf das Ergebniss der Rechnung äussern konnten. Die Perpendikel brauchten nicht sehr sorgfältig gezeichnet zu werden, weil es nur auf ihre *Länge* ankam und weil hierauf eine kleine Abweichung der *Lage* keinen messbaren Einfluss übte; allein jene Längen mussten mit aller Behutsamkeit abgegriffen werden.

Wäre ein Unterschied zu Tage gekommen, zwischen der Summe aller Breiten F V, V W etc. und der Länge 68,94, welche F E misst, so hätte man diesen bei jeder Breite, nach Verhältniss ihrer Grösse zur Ausgleichung bringen müssen.

Dies Eintreffen der Summe aller Breiten gab eine Probe für die Richtigkeit der Theilung; jedoch um sicher zu seyn, dass jenes Uebereinstimmen nicht etwa durch wettgeschlagene Fehler herbeigeführt worden, hat man nach vollendetem Auftragen noch einige Stücke berechnet, und zwar aus neuen, bisher noch nicht gebrauchten Maassen. Man fand die Summen der zwei ersten Stücke = 801,77, die Summe der drei folgenden = 1197,47 etc. Die Differenzen dieser Zahlen von 800, beziehungsweise 1200 waren nicht gerade bedeutend, zudem durfte man mit Zuversicht annehmen, dass die Stücke richtiger bestimmt seyen, als die Proberechnung es bezeugte.

Die Theilungspunkte konnten nun nach den erhaltenen Maassen abgepflöckt und die Furchen durchgepflügt werden. Nachdem

dies geschehen, hat man parallel zu A B und E F in einer Ruthe Entfernung zwei neue Linien abgesteckt, in welche die Steine zu sitzen kamen; die Durchschnitte der Steinlinien und der abgeflöckten Furchen wurden mittelst der Schnur bestimmt.

Zusatz. Zum Entnehmen von Maassen auf Plänen dient in bequemer Weise ein kleiner Apparat, bestehend aus einem Lineale, dessen Rand eine Theilung trägt, der jeweiligen Verjüngung des Planes entsprechend, und aus einem Winkelmaasse, worauf jene Seite, welche dem Lineale anliegt, einen Zeigerstrich erhält, besser noch einen Nonius. Liegt nun die Kante des Winkelmaasses wie in

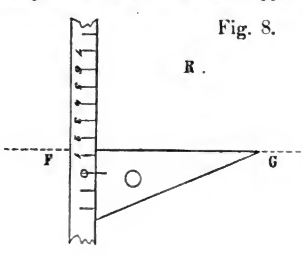


Fig. 8.

Fig. 8 an F G, während der Zeigerstrich mit dem Nullpunkte der Theilung zusammenfällt, und das Winkelmaass wird aufwärts geschoben, bis dieselbe Kante einen Punkt R deckt, so liest man links auf dem Lineale den Abstand zwischen R und F G ab, ohne einen Zirkel nöthig zu haben, dessen Berührung Pläne überhaupt so wenig vertragen. Zudem geschieht die Arbeit sicherer und rascher, als durch Vermittlung jenes Instrumentes.

Zu dem gleichen Zwecke dienen Glasplatten, worauf eine Theilung fein geäzt worden. Ihr Gebrauch setzt voraus, dass man viel auf Plänen zu arbeiten habe, welche nach *einerlei* Maassstab gezeichnet sind.

Zweites Beispiel.

Das Feld, Fig. 9, mit Ausnahme des krummen Ackers *(A)*, gehörte zweien Erben, und sollte unter diese gleichmässig vertheilt werden. Man kam überein, dem Besitzer der Parcelle *(A)* ein gleich grosses Stück Land I. VII. VIII. L. abzutreten

(welches dieser gerne annahm, weil er an Bodengüte gewann), und den Rest dann in gleichen Theilen zu vertheilen.

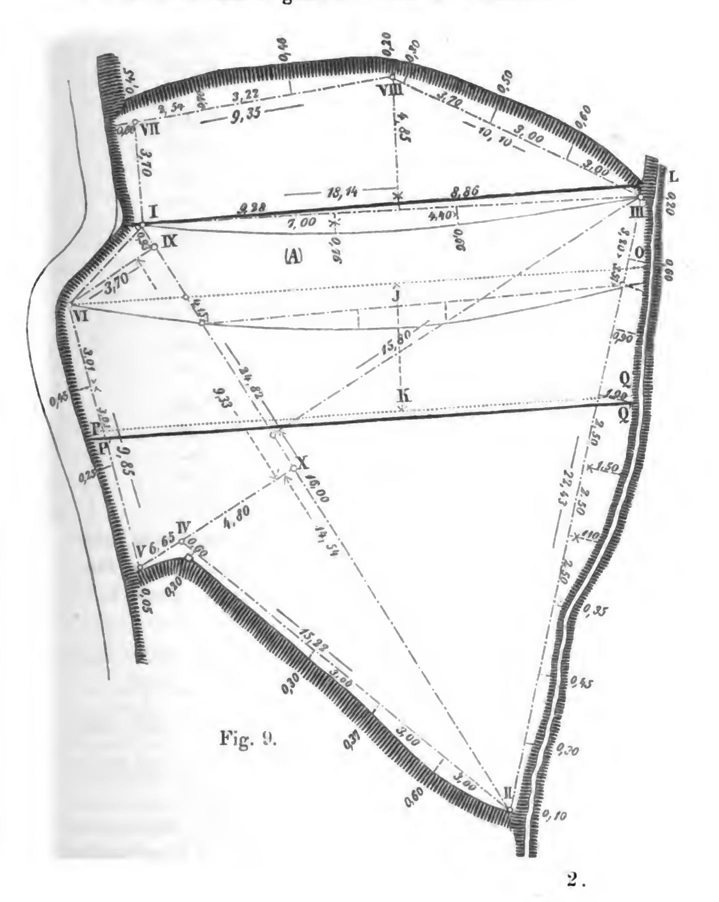


Fig. 9.

Der Inhalt betrug:

	Ruthen.
Dreieck I. II. III.	196,110
„ II. IV. X.	34,896
Viereck X. V. VI. XI.	39,652
Dreieck I. XI. VI.	1,720
„ III. XII. VIII.	21,485
Viereck XII. VIII. VII. I. . .	56,772
Grenzflächen an der Seite II. III. .	16,865
„ „ „ „ III. VIII.	4,390
„ „ „ „ VIII. VII.	9,823
„ „ „ „ VII. I. .	1,110
„ „ „ „ I. VI. .	0,080
„ „ „ „ VI. V. .	3,176
„ „ „ „ V. IV. .	0,555
„ „ „ „ IV. II. .	4,759
Summe .	391,393
Hievon ab der Acker (A)	91,130
zu vertheilende Fläche	300,263
Ein Theil Q	150,131

Den Bruch von Quadratruthen durfte man ausser Acht lassen, weil die Beschaffenheit der Gränzen (s. g. natürliche, Raine, Rinnsale) es gar nicht verstattete, den Flächeninhalt so genau zu bestimmen:

das Stück I. III. VIII. VII. beträgt nach oben	93,59	Ruth.
der Acker (A)	91,13	„
Unterschied . . . . =	2,46	Ruth.

Diesen Ueberschuss von 2,46 Quadratruthen hat man als ein Dreieck I. III. L von dem Fünfecke abgeschnitten.

Die Länge der Seite I. III. beträgt 18,4. Der Quotient hievon in $2 \times 2{,}46$ gibt 0,268 als Höhe des Dreieckes. Eine Parallele

zu I. III., und 0,268 von ihr entfernt, schneidet die Gränze in L, und bestimmt damit das erste abzuschneidende Stück.

Es blieb jetzt die Fläche I L II V VI in zwei gleiche Theile zu zerlegen, und man hat es passend gefunden, die Theilungslinie parallel zu I. L zu legen. Zu dem Ende ward durch VI. eine Parallele VI O zu I. L gezogen.

Das Trapez I VI O L beträgt	52,13
dies ab von . .	150,13
bleibt	98,00

Eine vorläufige Division mit der Länge von VI. O = 21,0 in diese 98,0 gab 4,6 zum Quotienten; in einer Entfernung J K = 4,6 zog man zu VI O die Parallele P′ Q′.

Das Viereck VI. Q fand sich	= 92,61
es sollte sein	98,00
Rest	5,39

Mit der Länge von P Q = 19,7 dividirte man in diesen Rest von 5,39 Quadratruthen und fand 0,273. In solcher Entfernung von P Q zog man zu ihr eine Parallele P′ Q′, und indem man P P′ Q Q′ als Parallelogramm betrachtete, war letzteres die richtige Theilungslinie.

Die Figur war in $^1/_{500}$ aufgetragen. Eine Berechnung von P′ V. II. Q′ gab 150,574; man konnte somit die Theilung für genügend erachten; die nötigen Maasse dem Plan entnehmen und das Auspflöcken besorgen.

Zusatz. Das Verfahren im vorstehenden Beispiele wird häufig angewendet: man schneidet in paralleler Richtung Stücke ab, und nähert sich so einem noch mangelnden, oder überflüssigen Streifen, welcher schmal genug ist, dass er als Parallelogramm behandelt werden darf. Soll es öfter nach einander angewendet werden, muss man dem, sonst unvermeidlichen Anhäufen kleiner Fehler dadurch entgegen wirken, dass man die Flächenberechnung auf

möglichst sichere Angaben stützt, und dass man nicht stets einzelne Stücke, sondern nach einander die Summe von zwei, drei, vier Stücken in Behandlung nimmt.

Zweites Buch.

Theilung durch Rechnung.

Das System rechtwinklicher Coordinaten.

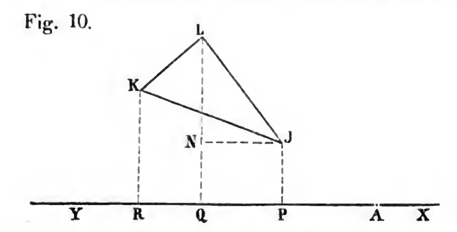
§. 5.

Wenn für viele Fragen der Geometrie die analytische Methode der Coordinaten ohne Zweifel etwas Ungefüges an sich hat, weil durch jedwedes Coordinatensystem die in Frage stehenden Figuren gewissermassen mit einem fremdartigen Gerüste umbaut werden, so bietet doch jene Methode, sobald es sich um die *Grösse* von Flächen- oder Körperräumen handelt, entschiedene Vorzüge, weil hier offenbar die einfache atomistische Vorstellung zu Hilfe kommt, dass ein jeder solcher Raum betrachtet werden könne, als bestehe er aus der algebraischen Summe aller seiner Ordinaten.

Indem wir hier nur solche Figuren unserer Betrachtung unterwerfen wollen, welche sammt ihren Coordinaten in *einer* Ebene liegen, sey z. B. J L K, Figur 10, ein beliebiges Dreieck, oder sonstiges Polygon. In der Ebene dieser Figur habe man

irgend wo eine gerade Linie X Y gezogen; und auf ihr, gleichfalls beliebig wo, einen Punkt A angenommen, welcher der *Anfangspunkt* heissen soll. Dies X Y gelte als Axe eines rechtwinklichen Coordinatensystemes. Es seyen darum aus den Ecken K, L, J, die Perpendikel J P, L Q, K R auf die Axe gefällt, und die Fusspunkte P, Q, R daselbst markirt worden.

Fig. 10.



In Bezug auf den Punkt J nun wird der Perpendikel J P die *Ordinate* dieses Punktes J genannt, und der Abschnitt A P die *Abscisse* desselben Punktes. Beide zusammengenommen, nämlich Ordinate und Abscisse, heissen die *Coordinaten des Punktes* J. Ingleichen erscheint L Q als Ordinate und A Q als Abscisse des Punktes L, sowie K R und A R die Coordinaten des Punktes K sind. Analytisch pflegt man die Ordinaten mit den Buchstaben $y, y', y'' \ldots$ oder $y_,, y_{,,}$ zu bezeichnen; die entsprechenden Abscissen aber mit $x, x', x'' \ldots$ oder $x_,, x_{,,} \ldots$ etc.

Die Coordinaten der Punkte einer Figur können als Linien gegeben seyn, oder als Zahlenwerte, oder in irgend einer Weise, in welcher man überhaupt mathematische Grössen auszudrücken pflegt. Ihrer Bedeutung nach aber sind es stets Liniengrössen, bei deren analytischer Behandlung man den etwaigen *Gegensatz der Lage* streng im Auge zu behalten hat.

Denkt man sich nämlich rings um den Anfangspunkt A herum beliebig viele Punkte liegend, und von einem jeden die Coordinaten angegeben, so werden bei einigen dieser Punkte die

Abscissen derselben von A aus *links* gegen P, Q, R . . . zu zählen seyn, bei andern aber in entgegengesetzter Richtung, nämlich nach *rechts* von A. Dessgleichen werden die Ordinaten einzelner Punkte, ob links oder rechts am A nach *aufwärts* gerichtet seyn, bei andern Punkten aber nach *abwärts*.

Das Entgegengesetzte wird hier wie überall in der Mathematik durch die Eigenschaft des Positiven und Negativen angedeutet. Bezeichnen x und y die absoluten Werte der Coordinaten eines Punktes, welcher *P* heissen soll, so wird durch $+x$ oder $-x$, durch $+y$ oder $-y$ angezeigt, ob die Abscisse von *P* diesseits oder jenseits von A, und ob die Ordinate desselben Punktes oberhalb oder unterhalb der Axe X Y zu nehmen sey.

Begriff von Projection.

§. 6.

Coordinaten und *Projectionen* sind verwandte Begriffe, welche in gewissem Sinne sich wechselseitig ergänzen. Den Fusspunkt R des Perpendikels K R (Fig. 10) nämlich nennt man auch die *Projection des Punktes* K *auf der Axe* X Y; dessgleichen ist Q die Projection von L; P die Projection von J auf derselben Axe. Was früher Ordinate hiess, ist jetzt *projicirende Linie.*

Denkt man sich *alle* Punkte der Linie K L auf die Axe projicirt, so nehmen sie daselbst den Raum R Q ein, und dies R Q heisst die Projection der Geraden K L auf der Axe X Y. So ist auch Q P die Projektion von L J, und P R ist die Projektion von J K auf derselben Axe.

Sobald man diese Projectionen in analytischem, oder algebraischem Sinne betrachtet, tritt auch die Verschiedenheit ihrer *Richtungen* hervor, und diese Verschiedenheit muss wieder durch die entgegengesetzten Vorzeichen angedeutet werden. Angenommen, es handle sich um die Summirung der Projectionen

einiger, oder aller Dreiecksseiten. Man umgehe das Dreieck von J über L, K etc., nnd folge den Projectionen der Dreiecksseiten bei P beginnend, also in der Richtung von hier gegen Y und man nehme dies zugleich für die positive Richtung an, dann wird die Projektion der dritten Seite KJ, nämlich RP in negativem Sinne auftreten, und man wird erhalten

$$PQ + QR + (-RP) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Dass die ähnliche Schlussfolgerung sich auf Polygone von beliebiger Seitenzahl anwenden lasse, liegt auf der Hand und man kann darum im Allgemeinen sagen:

„die algebraische Summe der Projectionen aller Seiten eines ebenen Polygones auf einer Axe, welche in derselben Ebene liegt, ist gleich Null".

Hat man einen, in sich nicht geschlossenen polygonalen Linienzug und projicirt denselben wie vorhin auf eine Axe, dann wird die algebraische Summe der Projektionen aller Seiten dieses Zuges gleich seyn der Projection der Verbindungslinie seiner Endpunkte.

Denn diese Verbindungslinie macht den Zug zum geschlossenen Polygone, und ihre Projection muss die Summe alle übrigen auf Null bringen.

§. 7.

Coordinaten und Flächenräume.

Die Gesammtheit aller Ordinaten oder projicirenden Linien von J L, Fig. 9, bildet ein Paralleltrapez J P Q L; sämmtliche Ordinate von L K bilden ein zweites Paralleltrapez L Q R K; ein drittes solcher Trapeze wird endlich gebildet durch die Summe aller projicirenden Linien der Seite KJ. Aus der Summe aller projicirenden Trapeze, das letzte negativ genommen, weil seine Grundlinie R P negativ, ergibt sich der Flächengehalt des Dreieckes J L K.

Die Abscissen der Dreieckspunkte, als A P, A Q, A R, sollen bezeichnet seyn mit x', x'', x''' die Ordinaten P J, Q L, R K mit y', y'', y''', so lässt die genannte Summe der Trapeze oder der Flächengehalt J des Dreiecks sich anschreiben.

$$2J = (y' + y'')(x'' - x') + (y'' + y''')(x''' - x'') + (y''' + y')(x' - x''') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In diesem Ausdruck muss das letzte Glied mit dem Factor $(x' - x''')$ offenbar wieder negativ werden.

Dieselbe analytische Form wird man für den Flächeninhalt eines jeden geradlinigen Polygones erhalten, wenn dasselbe durch die rechtwinklichen Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben ist. Bedeuten dabei $x^{(n)}$ und $y^{(n)}$ die Coordinaten des letzten Eckes, so würden die zwei letzten Glieder des fraglichen Ausdruckes seyn

$$\ldots (y^{(n-1)} + y^{(n)})(x^{(n)} - x^{(n-1)}) + (y^{(n)} + y')(x' - x^{(n)})$$

Aus dem obigen Ausdrucke (1) für den Flächeninhalt der Vielecke kann man durch Auflösung der Klammern die folgenden zwei entwickeln,

$$2J = x'(y''' - y'') + x''(y' - y''') + x'''(y'' - y') \quad \ldots \quad (2)$$
$$2J = y'(x'' - x''') + y''(x''' - x') + y'''(x' - x'') \quad \ldots \quad (3)$$

welche als Formeln für Proberechnungen nützlich seyn mögen. Entsprechende Formeln lassen sich für jedes Polygon entwickeln, und wenn m die Ordnungszahl eines Polygones bezeichnet, also $x^{(m)}$ und $y^{(m)}$ seine Coordinaten, so werden die Glieder des Ausdruckes (2) die allgemeine Form erhalten

$$\ldots\ldots x^{(m)}(y^{(m-1)} - y^{(m+1)}).$$

Die Ausdrücke der Formeln (3) aber werden gestaltet seyn

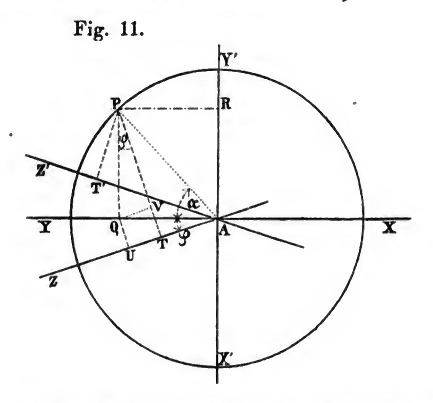
$$\ldots\ldots y^{(m)}(x^{(m+1)} - x^{(m-1)}).$$

§. 8.

Trigonometrische Beziehungen, zwischen polygonalen Figuren und ihren Coordinaten.

P, Figur 11, sey ein beliebiger einzelner Punkt. X Y eine als Axe dienende gerade Linie, und A auf ihr der Anfangspunkt der Coordinaten. Durch diesen Anfangspunkt wird die Gerade X' Y' rechtwinklich auf X Y gezogen und auch sie diene als eine Projectionsaxe. Zur Unterscheidung soll die erstere, wie üblich, Abscissenaxe, die zweite Ordinatenaxe, beide die Coordinatenaxen des Punktes P heissen.

Fig. 11.



Durch Fällen des Perpendikels P Q ist P auf die erste Axe nach Q projicirt worden, und vermittelst des Perpendikels P R auch auf die zweite Axe nach R.

Zugleich wurde der Punkt P mit dem Anfangspunkte mittelst der geraden Linie P A in Verbindung gebracht. Es soll diese Gerade der Fahrstrahl (radius vector) des Punktes P heissen.

Auf der Axe X Y erscheint nun die Abscisse A Q als die Projection von A P sowohl, wie von P R; auf der Axe X' Y' aber kann A R genommen werden als die Projection des Fahrstrales, gleichwie der Ordinate P Q.

Der Stral P Q bildet mit der Abscissenaxe einen Winkel, welchen wir mit α bezeichnet haben, und trigonometrisch genommen stellt die Ordinate P Q den *Sinus* dieses Winkels dar, so wie A Q den *Cosinus* desselben Winkels α, oder auch des ihn messenden Bogens P Y.

Sobald diese Sinus und Cosinus in algebraischem Sinne gebraucht werden sollen, müssen sie mittelst des Fahrstrales P A als Einheit gemessen werden. Daraus nun ergibt sich

$$\sin. \alpha = \frac{P\,Q}{A\,P} = \frac{y}{m} \quad \text{und} \quad \cos. \alpha = \frac{A\,Q}{A\,P} = \frac{x}{m}$$

wenn nämlich A P mit m, A Q aber wie bisher mit x und P Q mit y bezeichnet werden.

Für die Coordinaten von P aber erhält man

$$y = m \sin. \alpha \quad \text{und} \quad x = m \cos. \alpha \quad \ldots \quad (1).$$

Bezüglich der Axe Y' X' würde man die Coordinatenwerte erhalten

$$A\,R = x' = m \sin. \alpha \quad \text{und} \quad P\,R = y' = m \cos. \alpha \;.\; (2)$$

Entsprechende Verhältnisse sind in jedem rechtwinklichen Dreiecke als bestehend zu betrachten, ohne dass es erforderlich wäre, des mit der Hypothenuse als Radius beschriebenen Kreisbogens ausdrücklich zu gedenken.

Ist z. B. A U Q ein bei U rechtwinkliches Dreieck, so hat man hierin

$$\sin. Q\,A\,U = \frac{Q\,U}{A\,Q} \quad \text{und} \quad \cos. Q\,A\,U = \frac{A\,U}{A\,Q} \text{ etc.}$$

Die Trigonometrie unterzieht ihrer Betrachtung nur Winkel, welche zwischen Null und zwei Rechten liegen; in der Feldmesskunst aber erscheinen Winkel von allen Grössen, selbst über vier Rechte, und diese erfordern bei analytischer Behandlung dieselbe Rücksicht auf die Vorzeichen, wie die Coordinaten.

Dies zu erörtern denke man sich, es werde der Fahrstral A P um das Zentrum A rings herumgeführt, wobei A einen Kreisumfang beschreibt. Diesen Umfang theilen die beiden Coordinatenaxen in vier Quadranten und in jedem dieser Quadranten wird P A einmal in eine Lage gekommen sein, wo es mit der Axe X V einen Winkel bildet, welcher gleich ist dem Winkel α. In diesen vier Lagen von P A haben die Coordinaten von P die absoluten Werte

$$x = A\,Q = m \sin. \alpha; \qquad y = P\,Q = m \cos. \alpha.$$

Jedoch müssen die Vorzeichen dieser Ausdrücke dem Gesetze dieser Zeichen folgen, welches wir für die Coordinaten bereits §. 5 aufgestellt. Dass dies aber mit den trigonometrischen Vorschriften in dieser Beziehung übereinstimme, ist leicht nachzuweisen.

Zuvörderst sey bemerkt, dass wir uns in dieser Abhandlung überall der Dezimaltheilung des Kreises bedienen, als der bebequemsten für die praktische Geodäsie. Wir bezeichnen den Quadranten als Gradmaass des rechten Winkels mit 100^{g}.

Wenn nun der Fahrstral P A bei seiner Umdrehung um das Centrum A zum zweitenmale mit der Axe X V einen Winkel $= \alpha$ bildet, so liegt P A im zweiten Quadranten; seine Ordinate ist abermals nach aufwärts gerichtet, seine Abscisse aber liegt rechts von A gerade entgegengesetzt mit A Q. Da nun die Coordinaten im ersten Quadranten positiv genommen waren, so muss dem jetzigen y wieder der positive, dem neuen x aber der negative Charakter beigelegt werden.

Was aber die Neigungswinkel von A P gegen die Axe X Y anlangt, so werden diese von A Y beginnend rechts im Kreise herum gezählt. Im zweiten Quadranten macht desshalb unser A P mit der Axe einen Winkel, welcher nicht gleich α, vielmehr gleich $200^{g.} - \alpha$ anzuschreiben ist. Dies gibt also im fraglichen Falle

$$+ y = m \sin. (200^g - \alpha) = m \sin. x \ldots \text{und}$$
$$- x = m \cos. (200^g - \alpha) = - m \cos. \alpha,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} \sin. (200^g - \alpha) = \sin. \alpha \text{ und} \\ \cos. (200^g - \alpha) = - \cos. \alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Mit den Regeln der Trigonometrie stimmt das Ergebniss völlig überein. Es pflegt hier durch den Hinweis gerechtfertigt zu werden, dass bei dem Neigungswinkel von $200^g - \alpha$ der Sinus dieses Winkels sich genau auf A R projicire, der Cosinus aber auf A X entgegengesetzt von A Q falle.

Bei der Lage von A P im dritten Quadranten ist die Ordinate des Punktes P abwärts gerichtet, also $= - y$ zu setzen. Die Abscisse aber behält dieselbe Lage wie im zweiten Quadranten, wird darum nochmals $= - x$ anzuschreiben seyn. Zugleich aber projicirt sich der Fahrstral auf der Abscissenaxe, wie vorhin entgegengesetzt von A Q.

Auf der Axe X′ Y′ dagegen wird seine Projektion die Richtung von A gegen X′ haben, also der von A R entgegengesetzt seyn, da ferner im dritten Quadranten der Neigungswinkel von A P gegen die Axe X Y den Wert $200^g + \alpha$ angenommen, so wird man hier, nach den ähnlichen Gründen und Folgerungen wie vorhin zu setzen haben

$$\left.\begin{array}{l} x = m \cos. (200^g + \alpha) = - \cos. \alpha \\ y = m \sin. (200^g + \alpha) = - \sin. \alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

woraus $\left.\begin{array}{l}\cos.\ (200^g + \alpha) = -\cos.\ \alpha \text{ und} \\ \sin.\ (200^g + \alpha) = -\sin.\ \alpha\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (4)$

Im vierten Quadranten endlich, wo x wieder positiv, y aber noch negativ erscheint, wird A P sich auf X Y wieder nach A Q projiciren und auf X′ Y′ in der Richtung A X′; der Neigungswinkel wird dabei zu bezeichnen seyn mit $400^g - \alpha$. Hiernach folgt jetzt

$$x = m \cos.\ (400^g - \alpha) = m \cos.\ \alpha.$$
$$y = m \sin.\ (400^g - \alpha) = -\sin.\ \alpha.$$

oder $\left.\begin{array}{l}\cos.\ (400^g - \alpha) = \cos.\ \alpha \\ \sin.\ (400^g - \alpha) = -\sin.\ \alpha\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (5)$

Nach einer Umdrehung von mehr denn 400^g wird A P nach einander wiederum in den 1., 2. etc. Quadranten fallen, und bei den also gebildeten Winkeln gelten dann abermals die Regeln für die Vorzeichen des Sinus und Cosinus, welche so eben angeführt wurden.

Dies der Nachweis, den wir zu führen beabsichtigten; kurz zusammengefasst folgt daraus:

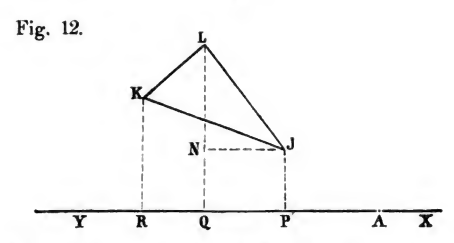
Sinus wie Ordinaten sind positiv bei Neigungswinkeln, welche in dem 1. und 2. Quadranten liegen, negativ bei Winkeln im 3. und 4. Quadranten. Cosinus aber wie Abscissen sind positiv im 1. und 4., negativ im 2. und 3. Quadranten.

§. 9.

Fortsetzung.

Nachdem in Fig. 12 die Dreiecksseite J L auf die Axe X Y nach P Q projicirt worden, sey J N parallel zur Axe gezogen, und dadurch das rechtwinkliche Dreieck J N L gebildet worden. In diesem Dreieck ist der Winkel N J L das Maass für die Neigung der Seite J L gegen die Axe. Dieser Winkel heisst in dem angenommenen Coordinatensystem einfach der *Neigungswinkel* von

Fig. 12.



J L; wir wollen ihn im gegenwärtigen Falle mit α bezeichnen. Dies als bekannt angenommen, ist für die Projektion P Q anzuschreiben

$$PQ = JL \cos. \alpha.$$

Für alle übrigen Seiten des Dreiecks J L K, oder irgend eines anderen Polygones findet man in ähnlicher Weise den Wert ihrer Projection dadurch, dass jegliche Seite mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels multiplicirt wird. Diese Neigungswinkel lassen sich, sobald der erste und alle Dreiecks- oder Polygonwinkel bekannt sind, der Reihe nach bis zum letzten ableiten. Dabei bleibt zu beachten, dass diese Winkel stets nach einerlei Richtung durch alle vier Quadranten hindurch gezählt werden müssen. Dadurch werden ihre Cosinus bald positiv, bald negativ erscheinen; da aber die Polygonseiten nicht anders, als positiv auftreten können, so ist die positive oder negative Eigenschaft der obgenannten Producte allein abhängig von dem Vorzeichen des jedesmaligen Cosinus.

Bezeichnen wir die Seiten eines Polygones der Reihe nach mit s', s'', s''' . . . . . . $s^{(m)}$, wobei m die Ordnungszahl der letzten Seite ausdrücken soll, ferner durch α', α'', α''' . . . . $\alpha^{(m)}$ die Neigungswinkel, welche diesen Seiten entsprechen, dann lässt sich der Satz, welchen wir am Schlusse des §. 6 ausgesprochen, also anschreiben:

$$s' \cos. \alpha' + s'' \cos. \alpha'' + s''' \cos. \alpha''' + \ldots + s^{(m)} \cos. \alpha^{(m)} = 0 \quad . \ (1)$$

Dieser Formel soll sogleich die folgende beigefügt werden

$$s' \sin.\alpha' + s'' \sin.\alpha'' + s''' \sin.\alpha''' \ldots + s^{(m)} \sin.\alpha^{(m)} = 0 \quad . \quad (2)$$

welche gerechtfertigt seyn wird, wenn man sich das Polygon auf eine zweite Axe, rechtwinklich gestellt gegen die erste, projicirt denkt, dabei den Inhalt der Formel (2) §. 8 beachtet, und dann diese neuen Projektionen summirt.

Bekanntlich ist die Summe aller Winkel eines Polygones nur abhängig von der Seitenzahl desselben, und wenn man diese Polygonwinkel in ihrer Reihenfolge mit P', P'', P''', ... $P^{(m)}$ bezeichnet, den rechten Winkel aber mit R, folgt

$$P' + P'' + P''' \ldots + P^{(m)} = (m - 2)\, 2\, R \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Durch diese drei Formeln sind die Mittel gegeben, in einem Polygon drei etwa mangelnde Stücke (Seiten oder Winkel) durch Rechnung zu finden, wenn die übrigen Seiten und Winkel gegeben worden; vorausgesetzt, es befänden sich unter den fehlenden Stücken nicht mehr denn zwei Seiten. Es liegt hierin die Grundlage jener mathematischen Disciplin, welche man Polygonometrie genannt hat.

Für unsern Zweck enthalten jene Formeln erstlich die Hinweisung, wie aus jenen Seiten und Winkeln die Coordinaten eines Polygones, oder polygonalen Linienzuges abgeleitet werden können; zweitens aber liefern sie das schätzbare Mittel, zu erproben, ob bei einer polygonalen Vermessung die beabsichtigte Genauigkeit wirklich eingehalten worden sey.

Näheres zur Orientirung in diesen für die praktische Feldmesskunst wichtigen Geschäften werden die nachfolgenden §§. an die Hand geben.

Einige Zusätze. Mit A, B, C seyen die Ecken oder Winkel eines Dreieckes bezeichnet und mit a, b, c die ihnen gegenüberstehenden Seiten. Eine derselben, z. B. a, werde als Abscissen-

axe genommen und das Eck A darauf projicirt, dann folgt nach der Formel (2)

$$c \sin. B - b \sin. C = 0$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{b} &= \frac{\sin. C}{\sin. B} \\ \frac{c}{a} &= \frac{\sin. C}{\sin. A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Formel würde gefunden werden, wenn man die Seite b zur Axe genommen hätte.

Der bekannte Satz, welcher durch diese Formeln ausgesprochen wird, pflegt man die „Regel der Sinus" zu nennen.

Abermals die Seite a als Axe beibehalten, folgt nach den Formeln (1)

$$a = b \cos. C + c \cos. B$$

nimmt man aber nach einander b und c als Axen an, so ergäbe sich im ersten Fall

$$b = c \cos. A + a \cos. C \text{ und}$$
$$c = b \cos. A + a \cos. B.$$

Man multiplicire die erste der drei Gleichungen mit a, die zweite mit b, die dritte mit c, und subtrahire die Summe der beiden letzteren von der ersten, so gibt sich als Endresultat

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Der Satz, welchem diese Formel als analytisches Symbol dient, wird häufig als eine Erweiterung des Pythagoräischen Lehrsatzes angeführt. Aus unserer Herleitung ersieht man, dass er nur einen besonderen Fall ausspricht eines allgemeineren, für

alle geradlinigen Polygone geltenden Gesetzes, welches in der Eigenthümlichkeit der Projectionen seine Begründung findet.

§. 10.

Ableitung der Coordinaten geodätischer Figuren.

Coordinaten von Geländepuukten sind bei geodätischen Arbeiten das Ergebniss theils einer unmittelbaren Beobachtung und Messung, theils einer trigonometrischen Rechnung, wozu durch die Aufnahme die Elemente geliefert werden.

Das unmittelbare Bestimmen von Coordinaten geodätischer Punkte ist eine gewöhnliche Arbeit der Einzelvermessung. Die also erhaltenen Coordinaten gehören aber nur selten einem einzigen Systeme an, beziehen sich vielmehr auf die Hauptlinien, welche das geometrische Netz oder Gerippe der Aufnahme bilden, und von welchen jegliche als Axe zum Vestlegen der in ihrer Nähe befindlichen Einzelpunkte genommen wird.

Die Beschaffenheit der Instrumente, welche hiezu dienen, nämlich der „Kreuzscheiben“, verstattet das Abstecken von verhältnissmässig nur kurzen Ordinaten, denn das Zielen durch die „Absehen“ lässt keine grosse Schärfe zu und beim Abgeben der rechten Winkel sind aus diesem Grunde schon keine engeren Gränzen der Genauigkeit als innerhalb 10 Dezimalminuten zu erwarten. Das aber macht die Abscissen auf $^1/_{600}$ der Ordinatenlängen unsicher, und ist noch nicht die *einzige* Quelle von Unzuverlässigkeiten.

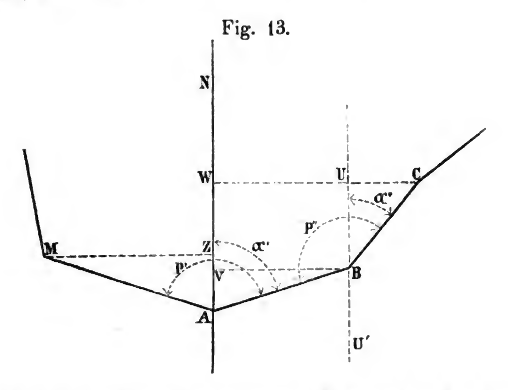
Bei mittelbarer Bestimmung der Coordinaten einzelner Punkte werden in der Regel diese Punkte der Reihe nach durch gerade Linien verbunden, einer jener Punkte in gleicher Weise mit der Axe. Die Längen dieser Verbindungslinien werden gemessen und die Winkel, welche sie paarweise bilden, beobachtet.

Dies sind die Elemente, welche die Messung zu liefern hat; das Weitere aber ist die Arbeit einer schon angedeuteten einfachen trigonometrischen Behandlung.

Wo bei einer Aufnahme die Mittagslinie eines Ortes als Coordinatenaxe dient, da nennt man die Neigungswinkel, nach astronomischem Vorgange, die „Azimuthe" der Polygonseiten. Diese Azimuthe werden entweder von Süd über West, oder von Nord über Ost im Kreise herum gezählt.

A, B, C . . . (Fig. 13.) seyen die Ecken eines Poligones; A soll als erstes gelten und m sey die Ordnungszahl des letzten. Von diesem Polygone sind sämmtliche Seiten und Winkel gemessen worden, die Polygonwinkel sollen, bei A beginnend, mit P', P'' . . . $P^{(m)}$ bezeichnet werden und die Seiten A B, B C etc. mit s', s'' . . . . $s^{(m)}$.

Fig. 13.



Durch A geht eine gerade Linie, A N, welche als Axe dienen soll (man kann sich darunter die Nordrichtung denken), und man verlangt die Coordinaten der Polygonecken bezüglich auf diese Axe. Der Winkel N A B $= \alpha'$, als erster Neigungswinkel wird für bekannt angenommen.

Nachdem B, C, ... M nach V, W ... Z auf die Axe projicirt worden, hat man durch B eine Parallele U U' zur Axe gezogen. Dadurch ist U B C $= \alpha''$ als zweiter Neigungswinkel bestimmt u. s. w.

Nun hat man A B U' $= \alpha'$, daher

$$\alpha'' = \alpha' + P'' - 200^g .$$

In gleicher Weise wird man für den dritten Neigungswinkel finden

$$\alpha''' = \alpha'' + P''' - 200^g$$

und zuletzt wieder den ersten

$$\alpha' = \alpha^{(m)} + P' - 200^g .$$

Leicht wird man den Wertausdruck für die Regel zur Ableitung der Neigungswinkel finden, welche hier in allgemeinen Zeichen gegeben ward.

Man bemerke dabei: für jeden Neigungswinkel ist die Axe, oder die Parallele zur Axe, welche durch den Eckpunkt geht, der Schenkel *links*, und von da an rechts herum bis zur Polygonseite werden die Winkel gezählt. In entsprechender Weise läuft auch die Bezifferung der neueren Theodolite und übrigen Winkelmesser.

Durch die Perpendikel B V, C W etc. werden an jedem Polygonecke rechtwinkliche Dreiecke gebildet wie C U B etc. Die Catheten dieser Dreiecke nennt man Coordinaten-Differenzen. Denn die Coordinaten von B sind A V und B V, die Coordinaten von C sind A W und C W wenn A als Anfangspunkt genommen wird. Aber man hat V W = B U; W U = B V, also A W = A V + B U und C W = B V + C U u. s. w.

Die Unterschiede der Abscissen, wie B U, sollen mit Δx (sprich Differenz x) bezeichnet werden; die Unterschiede der Ordinaten, wie C U, mit Δy (sprich Differenz y).

Um sofort die Coordinaten zu finden, hat man nur eine Anzahl rechtwinklicher Dreiecke aufzulösen, in welchen die Hypothenusen und Winkel bekannt sind.

Für den Punkt B hat man

$$A V = x = s' \cos. \alpha'; \; B V = y = s' \sin. \alpha'$$

Für den Punkt C gibt sich

$$\Delta x = s'' \cos. \alpha''; \; \Delta y = s'' \sin. \alpha''$$

und $A W = x = \Delta x +$ das vorhergehende x (nämlich B V).
$C W = y = \Delta y +$ das vorhergehende y (nämlich A V).

Ist man mit der fortgesetzten Berechnung auf diese Weise bis zum Punkte A gekommen und hat für diesen

$$\Delta x = s^{(m)} \cos. \alpha^{(m)} \text{ und } \Delta y = s^{(m)} \sin. \alpha^{(m)}$$

entwickelt, so werden diese Werte gleich erscheinen dem x und y von M, nämlich $= A Z$ und $= M Z$, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen, weil sie, zu jenen hinzugefügt, die Coordinaten von $A = 0$ darstellen müssen.

Vollkommen wird dies bei praktischen Arbeiten nie zutreffen, allein es liegt einmal in der Grösse des Unterschiedes zwischen dem praktischen Ergebniss und der theoretischen Forderung ein Maassstab zur Beurtheilung des Grades von Genauigkeit, welcher der Messung zuerkannt werden darf, und wenn man diesen für befriedigend ansprechen kann, ist es auch statthaft, den fraglichen Unterschied durch eine einfache Ausgleichung zu beseitigen.

Handelt es sich um die Berechnung der Coordinaten eines nicht geschlossenen Polygones, oder eines gebrochenen Linienzuges zwischen zwei Geländepunkten, deren Coordinaten im Voraus gegeben sind, so müssen die Summen der Coordinaten-Unterschiede des Zuges den Coordinaten-Differenzen der zwei Punkte gleich werden, oder durch eine zulässige Ausgleichung gleich gemacht werden können.

Vermittelst der Coordinaten lassen sich polygonometrische Aufgaben meist bequem lösen. Nur eines einzigen Beispieles zu gedenken, sey angenommen, in einem Polygone wären sämmtliche Seiten gemessen worden bis auf eine, und alle Winkel bis auf jene zwei, welche diese Seite mit ihren zwei anstossenden bildet. Die unbekannte Linie zu finden, wähle man jene Seite, welche links an dieselbe stösst, zur Coordinatenaxe, so ist der nächste rechts gegebene Polygonwinkel auch der erste Neigungswinkel.

Nachdem die Neigungswinkel der übrigen Seiten abgeleitet worden, berechne man für jede derselben die Produkte $s \sin. \alpha$ und $s \cos. \alpha$, und addire beide Reihen. Bei der ersten Reihe ist ihre arithmetische Ergänzung zu Null gleich der Ordinaten-Differenz der letzten Seite, und für die zweite Reihe ist ihr Unterschied zwischen der Länge der als Axe dienenden Polygonseite die Abscissen-Differenz der gesuchten Seite. Diese Seite erscheint somit als Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreieckes, dessen Catheten so eben gefunden wurden.

§. 11.

Uebergang von einem Coordinatensystem zum andern.

Analytischer Behandlung, wobei Coordinaten zu Grund liegen, können begreiflich nur solche Punkte einer Figur *gleichzeitig* unterworfen werden, deren Abscissen und Ordinaten einem und demselben System angehören, d. h. welche sich auf dieselbe Axe und denselben Anfangspunkt beziehen. Dass solches bei Messungsergebnissen keineswegs immer der Fall, ward bereits gesagt. Es kann auch vorkommen und verhält sich in der That oft also, dass die Coordinaten einer Figur gegeben seyen in Bezug auf eine Axe, deren Lage, zusammengehalten mit den Bedingnissen einer gestellten Aufgabe, die Lösung derselben so weitschichtig machen würde, dass es notwendig, mindestens nützlich erscheint, mit den

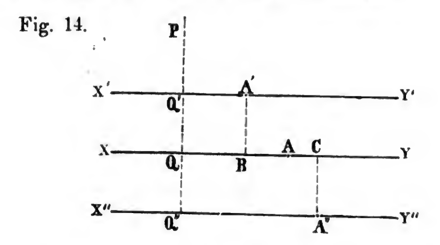
Coordinaten von jener ersten Axe auf eine andere von solcher Lage überzugehen, dass jener Uebelstand schwindet.

Solch einen Uebergang von einer Axe zur andern pflegt man die „Umwandlung der Coordinaten" zu nennen. Dieser, für Theilungsaufgaben bedeutsame Gegenstand wird nicht oft in der ihm gebührenden Beleuchtung vorgetragen, wesshalb dabei zu verweilen hier gerechtfertigt erscheinen wird.

Wir unterscheiden bei der Frage zwei Fälle: die neue Coordinatenaxe ist erstlich parallel der ursprünglichen, oder zweitens sie macht mit dieser irgend einen Winkel.

Erster Fall. Fig. 14. X Y sey für den Punkt P die Abscissenaxe und $AQ = x$, $PQ = y$ seine Coordinaten.

Fig. 14.



Die Axe sey nun in paralleler Richtung nach X' Y' gerückt worden, der Anfangspunkt von A nach A'. Die Coordinaten des neuen Anfangspunktes seyen $AB = a$, $AB = b$. In diesem Falle nun wird die neue Abscisse seyn:

$$A'Q' = x' = x - a$$

die neue Ordinate $\quad PQ' = y' = y - b.$

Wäre aber X'' Y'' die neue Axe und A'' der neue Anfangspunkt, also $AC = a$ seine Abscisse, $A''C = b$ seine Ordinate, so müssen diese Beiden negativ genommen werden, wenn das vorige

a und b positiv gewesen. Daher wären die neuen Coordinaten von P:

$$A'' Q'' = x'' = x + a \text{ und } P Q'' = y'' = y + b.$$

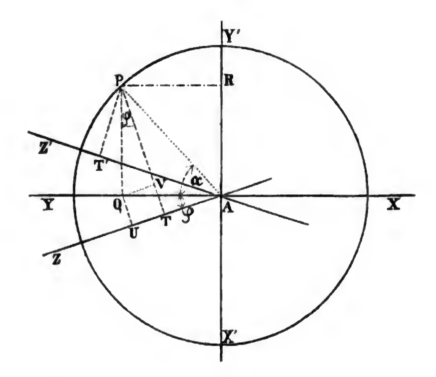
Allgemein also: wenn, bei paralleler Verschiebung der Axe, a und b die Coordinaten des neuen Anfangspunktes sind, so hat man

$$x' = x \mp a, \text{ sowie } y' = y \mp b \ldots\ldots\ (1)$$

als Werte der neuen Coordinaten irgend eines Punktes, dessen ursprüngliche Abscisse und Ordinate x und y gewesen sind.

Zweiter Fall. Fig. 15. Für den Punkt P seyen A Q = x, P Q = y seine Coordinaten in Bezug auf die Axe X Y und diese Grössen sollen als positiv gelten.

Fig. 15.



Durch A gehe nun eine Linie A Z, welche mit X Y irgend einen Winkel Y A Z = φ bildet. Dies A Z soll als neue Coor-

dinatenaxe genommen werden, der Anfangspunkt A aber unverändert bleiben.

Nach Fällen des Perpendikels P T sind die neuen Coordinaten $A T = x'$ und $P T = y'$ des Punktes P geometrisch construirt.

Man sieht, dass diese Grössen nur abhängen von dem ursprünglichen x, y und von dem Winkel φ der ersten und der neuen Axe. Analytische Formeln zu erhalten für die Werte von x' und y', ausgedrückt durch die letztgenannten Grössen, projicire man das x, nämlich A Q auf die neue Axe, wo es den Raum A U einnehmen wird. Das erste y aber projicire man auf die neue Ordinate, wo es, nach Fällen des Perpendikels Q V, den Raum P V decken wird.

Nun bilden die beiden Ordinaten P Q und P T einen Winkel, welcher gleich ist dem Winkel beider Axen A Y, A Z, also $= \varphi$, weil die Schenkel dieser Winkel paarweise zu einander rechtwinklich stehen, man wird darum anschreiben können:

$$\begin{aligned} AU &= x \cos. \varphi \\ VT &= QU = x \sin. \varphi \\ PV &= y \cos. \varphi \\ TU &= QV = y \sin. \varphi, \end{aligned}$$

es ist aber

$$\begin{aligned} x' &= AT = AU - TU \\ y' &= PT = PV + TV. \end{aligned}$$

Für die Glieder rechts der zweiten Gleichheitszeichen die oben angegebenen Werte eingeführt, gibt sich

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos. \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= y \cos. \varphi + x \sin. \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Den Fall zu erörtern, wenn die neue Axe oberhalb X Y liegt, z. B. in der Richtung A Z', so stellt nach Fällen des Perpendikels P T' dies das jetzige y', und A T' das jetzige x' vor.

Projicirt man wiederum das x auf die neue Axe, das y auf y', so wird x' sich darstellen als die Summe zweier Segmente, y' als die Differenz zweier andern, beide Paare jedoch von gleichem Werte wie vorhin und man wird erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \cos.\ \varphi + y \sin.\ \varphi \\ y' = y \cos.\ \varphi - x \sin.\ \varphi \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese letzteren Formeln unterscheiden sich von jenen unter Nr. (2) nur durch die Vorzeichen der zweiten Glieder, aber sie müssen als die normalen Vorschriften für die Umwandlung der Coordinaten gelten. Denn bei methodischer Behandlung der Frage kann es nicht anders angemessen erscheinen, als dass jener Fall vorangestellt wird, wobei der Winkel φ in der Region der positiven Ordinaten liegt wie Y A Z'. Zählt man dann diese Winkel rechts im Kreise herum, so ist ersichtlich, dass Y A Z nicht mit φ, sondern mit $400^g - \varphi$ bezeichnet werden müsse, also einen Winkel im vierten Quadranten vorstelle, oder aber, es müsste der Winkel Y A Z in negativem Sinne genommen werden.

Im einen, wie im andern Falle werden die Glieder, welche cos. φ zum Factor haben, positiv erscheinen, jene aber, bei denen sin. α auftritt, negativ. Die Formeln (3) sind darum giltig für jede Grösse des Winkels α. Dass wir oben den Fall vorangestellt, wobei A Z in der Region der negativen Ordinaten liegt, geschah nur aus dem Grunde, weil hier die Construction, wie die analytische Ableitung augenfälliger wird.

Wenn die neue Axe nicht durch den Anfangspunkt der ursprünglichen Coordinaten ginge, so handelte es sich noch um eine nachträgliche parallele Verschiebung der Coordinaten, was Eingangs dieses §. erörtert worden.

Zusatz. Nimmt man in Fig. 15 den Fahrstral A P = m in Betrachtuug und setzt

$$AQ = x = m \cos. \alpha, \quad PQ = y = m \sin. \alpha;$$

ferner:

$$AT = x' = m \cos. (\alpha + \varphi); \quad PT = y' = m \sin. (\alpha + \varphi);$$

oder

$$AT' = x' = m \cos. (\alpha - \varphi); \quad PT' = y' = m \sin. (\alpha - \varphi);$$

so folgt aus (2) und (3)

$$\cos. (\alpha \pm \varphi) = \cos. \alpha \cos. \varphi \mp \sin. \alpha \sin. \varphi$$
$$\sin. (\alpha \pm \varphi) = \sin. \alpha \cos. \varphi \pm \cos. \alpha \sin. \varphi.$$

Diese Formeln für Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz zweier Winkel, ausgedrückt durch Sinus und Cosinus der Winkel selbst, bilden die Grundlage der ganzen analytischen Trigonometrie; sie ergeben sich, wie man sieht ganz einfach, gewissermassen als Nebenproduct bei der Umwandlung der Coordinaten, obschon auch zu direkter Herleitung die Construction nicht geeigneter seyn könnte.

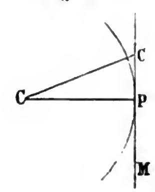
§. 12.

Zur Geschichte der Trigonometrie.

Um jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben, oder beschrieben denken; dies als gethan unterstellt, erscheinen Seiten und Winkel der ersten Figur in doppelter Weise: erstlich als dem Dreiecke, und zweitens als dem Kreise angehörig. In letzterer Beziehung sind die Dreiecksseiten Sehnen von Kreisbögen und die Dreieckswinkel sind Peripheriewinkel, welche zum Maasse je die halben, durch die gegenüberstehende Sehne überspannten Bögen haben. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines geradlinigten Dreieckes sind demzufolge durch den Satz ausgedrückt, „dass die Seiten dieses Dreieckes sich verhalten wie die Sehnen der doppelten Bögen, welche die ihnen entgegenstehenden Winkel messen“. Mit Hilfe dieses

Satzes sind die ältesten trigonometrischen Rechnungen ausgeführt worden. Der Alexandrinische Mathematiker *Ptolemäus*, welcher im zweiten Jahrhundert nach Christus gelebt, hat sich dabei einer Sehnentafel bedient, für Grade, deren 90 auf den Quadranten gehen und worin die Sehnenlängen für Bögen angegeben waren, welche von $^1/_2$ zu $^1/_2$ Grad fortschritten. Die Einheit ist aber bei *Ptolemäus* der sechszigste Theil des Halbmessers, und seine Unterabtheilungen, die er gleichfalls Minuten, Secunden etc. nennt, sind wiederum je die Sechszigstel der vorhergehenden. Den mittelalterlichen Mathematikern, namentlich den arabischen, verdankt man die Einführung der halben Sehnen oder der Sinus. Der berühmte Wiederhersteller astronomischer Wissenschaft, *Georg Peurbach*, aus Peurbach an der österreichisch-bayrischen Gränze hat um die Mitte des fünfzehnten Jahrhunderts Sinustafeln, von 10 zu 10 Minuten fortschreitend, berechnet, für einen Radius, den er gleich 60000 setzte. Diese Arbeit Peurbachs ist jedoch wenig bekannt geworden, denn sein noch berühmterer Schüler *Johannes Müller*, gewöhnlich Regiomontan genannt, nach seiner Geburlsstadt Königsberg in Franken, scheint von den Sinustafeln seines Lehrers nichts gewusst zu haben. Er berechnete bereits um 1463 solche Tafeln nach einzelnen Minuten fortschreitend, und zwar zuerst für einen Halbmesser = 6 000 000, später für einen solchen = 10 000 000. Diese Tafeln sind 1490 im Auszuge, vollständig aber erst 1541 gedruckt worden.

Fig. 16.



Stellt C P O ein bei P rechtwinkliches Dreieck vor, und man denkt aus C mit C P als Radius einen Kreisbogen beschrieben, dann erscheint der verlängerte Cathete O P M als geometrische Tangente des Kreises am Punkte P. Das Stück O P aber ist die *trigonometrische* Tangente des Winkels C oder des Bogens zwischen seinen Schenkeln.

Als Rechnungsgrösse muss O P wieder durch den Radius C P gemessen seyn, d. h. man hat zu sehreiben

$$\text{tang. C} = \frac{\text{O P}}{\text{C P}}$$

Dieselbe Betrachtungsweise ist sofort auf das gegenseitige Verhältniss des Catheten eines jeden rechtwinklichen Dreieckes anwendbar und man wird unter anderm ansetzen können

$$\frac{\text{C P}}{\text{C O}} = \text{tang. O},$$

ohne weiter des Kreisbogens zu gedenken, der jetzt eigentlich aus dem Centrum O mit O P als Radius gezeichnet werden musste. Da aber O = *compl.* C, so ist

$$\frac{\text{C P}}{\text{C O}} = \text{tang. compl. C} = \text{cot. C},$$

und für den Theil nach dem letzten Gleichheitszeichen wäre wieder C P der Radius.

Immer den gleichen Radius beibehalten, so nennt man, obwohl nicht sehr geeignet, die Hypothenuse C O Secante des Winkels C oder des ihm entsprechenden Bogens, es ist nämlich

$$\frac{\text{C O}}{\text{C P}} = \text{sec. C.}$$

Nun lassen sich aber die Gatheten des Dreieckes auch durch Sinus und Cosinus des Winkels C ausdrücken, woraus folgte

$$\text{tang. C} = \frac{\text{O P}}{\text{C P}} = \frac{\text{O C sin. C}}{\text{O C cos. C}} = \frac{\text{sin. C}}{\text{cos. C}} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$\text{sec. C.} = \frac{\text{C O}}{\text{C P}} = \frac{\text{O C}}{\text{O C cos. C}} = \frac{1}{\text{cos. C}} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Diese Ausdrücke zeigen vorerst, dass der Gebrauch von Tangenten und Cotangenten, von Secanten und Cosecanten bei

trigonometrischen Rechnungen strenge genommen entbehrt werden könnten, und in der That haben sich die Mathematiker, wenigstens die abendländischen, seit *Ptolemäus* bis auf *Regiomontan* und *Rhäticus* ohne trigonometrische Tangenten oder Secanten behelfen müssen, weil ihnen die dazu unentbehrlichen Tafeln mangelten. Denn von *Regiomontan* stammt unsere erste Tangententafel, welche der Verfasser, obwohl sie nur von Grad zu Grad fortschritt, dennoch *tabula foecunda* nannte, für so vielseitig erachtete er ihre Anwendbarkeit. Von *Erasmus Rheinhold*, Professor der Mathematik zu Wittenberg, hat man einen *canon foecundus*, welcher 1553, dem Todesjahre des Gelehrten, zu Tübingen erschien: darin sind für einen Radius = 10 000 000 die Tangenten durch einzelne Minuten des Quadranten fortlaufend gegeben.

Der eben so mühevollen als langwierigen Arbeit Tafeln zu berechnen, worin die Sinus, Tangenten, Secanten etc. nach kleineren Bogenunterschieden fortschreiten, hat sich zuerst, so weit es bekannt, *Georg Joachim*, aus Feldkirch in Vorarlberg, unterzogen, nach seinem Vaterlande, einem Theile des alten Rhätiens, gemeinlich *Rhäticus* genannt. Seine Tafeln für einen Halbmesser von 10 000 000 000 gehen von 10″ zu 10″, und bei r = 1 000 000 000 000 000 geben sie für den ersten und letzten Grad die Sinus für einzelne Sekunden an. *Rhäticus* starb 1576 in Ungarn, seine Tafeln aber erschienen zu Ende des 16. Jahrhunderts in dem *opus palatinum de triangulis* von *Otho*, einem seiner Schüler. Der letztgenannte wichtigere Theil aber erst um die Mitte des 17. Jahrhunderts in dem *thesaurus mathematicus* von *Pitiscus*, dem ersten ausführlichen Lehrbuche über Trigonometrie.

Nachdem man sich sonach durch 13 Jahrhunderte mit der Ptolemäischen Sehnentafel beholfen, gehörte die Kraft der oben angeführten und anderer, hier nicht genannter, hoch begabter Männer dazu, um während der zweiten Hälfte des fünfzehnten und

während des ganzen sechszehnten Jahrhunderts hindurch die trigonometrischen Tafeln endlich auf jene Stufe von Ausdehnung, Correctheit und Dienlichkeit zu bringen, die sie vor Einführung der Logarithmen haben konnten. Bei dem Anblicke solcher Arbeiten und solchen Erfolges, war um jene Zeit ein *Vieta* in seinem *canon mathematicus* zu dem Ausrufe wohl berechtigt: *Ex angulis latera, vel ex lateribus angulos, et mixtim, in triangulis tam planis quam sphaericis adsequi, summa gloria mathematici est. Sic enim coelum et terras et maria felici et admirando calculo mensurat.*

Dieselben Erwägungen mögen aber noch zu einem anderen Ergebnisse führen, nämlich zu einer heilsamen Bescheidenheit im Schätzen unserer selbst; wenn wir die kaum zu übersehende geistige Hinterlassenschaft unserer Vorfahren ins Auge fassen und dabei beherzigen wollen, welchen Aufwand an Geisteskraft und Zeit, oft von Jahrhunderten, jedwede Erweiterung irgend eines Stückes unserer Erkenntniss gekostet hat.

Logarithmisch trigonometrische Tafeln erschienen fast unmittelbar nach Erfindung der Logarithmen. Eine der ersten sind *Edmund Gunter's* briggische Logarithmen von Sinus und Tangenten auf 7 Dezimalstellen für den log. sin. tot. = 10. London 1620. In solchen Sammlungen hat man die Tafeln für Secanten und Cosecanten wieder hinwegelassen, denn weil

$$\sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{cosec.} \alpha = \frac{1}{\sin. \alpha}$$

so ist der log. sec., oder der log. cosec. irgend eines Winkels einfach die dekadische Ergänzung von log. cos. oder log. sin. desselben Winkels.

Noch im siebenzehnten Jahrhundert diente Trigonometrie lediglich zu astronomischen, wohl auch zu astrologischen Rechnungen; dass sie jetzo dem *Geometer* unentbehrlich geworden und dass zugleich die gesammte praktische Geometrie eine zu

ihrem Vortheile veränderte Gestalt gewonnen, dies verdankt sie nicht sowohl der Trigonometrie an sich als den Fortschritten der construirenden Optik und Mechanik, namentlich *Frauenhofer*, dann *Reichenbach*, seiner Kreistheilungs-Methode und Maschine. Diese haben es ermöglicht, dass jetzt goniometrische Instrumente zu einem verhältnissmässig billigen Preise zu erhalten sind, welche schon bei einfacher Beobachtung einen Winkel auf 1, mindestens doch auf 2 Minuten sicher angeben. Vor 50 Jahren noch war es schon ein *sehr gutes* Instrument, wenn seine Theilstriche auf 10 Minuten richtig sassen, wobei es aber jedenfalls noch an einer Excentricität von wenigstens gleichem Betrage zu leiden hatte.

Wozu nun sollte es dienlich erscheinen, Rechnungen auf Minuten und Bruchtheile davon zuzuspitzen, wenn die Beobachtungen, mit deren Ergebnissen die Rechnung zu führen war, an Unsicherheiten von fast $^1/_4$ Grad siechten.

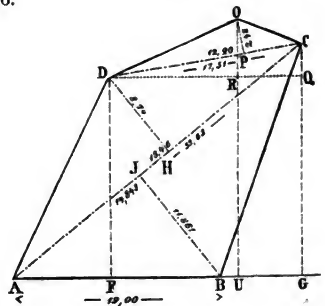
Eine Construction mit Zirkel und Lineal machte dann, ohne Bedenken, trigonometrische Rechnungen überflüssig. Freilich hat man jetzt mannigfachen Anlass, vor entgegengesetzten Fehlern auf der Hut zu seyn, vor jenen nämlich, Mücken als Elephanten zu behandeln.

§. 13.

Einige Beispiele der Anwendung vorgehender Sätze.

I. Das Viereck ABCD, Fig. 16, ward in der Aufnahme bestimmt mittelst der Diagonalen AC und mittelst der beiden Perpendikel aus den gegenüberstehenden Ecken D, B auf diese Diagonale. Die gefundenen Zahlenwerte sind der Figur beigeschrieben. Man verlangt nun die Coordinaten desselben Viereckes, indem die Grundlinie AB als Abscissenaxe gegeben wird.

Fig. 16.



Lösung. Für den Punkt D ist hier das ursprüngliche x = A H = + 18,46; das ursprüngliche y = D H = + 8,74. Das neue x, oder x' ist bezeichnet durch A F; y' durch D F. Der Winkel α des §. 11 wäre in unserer Figur D A H; der Winkel φ aber C A B. Werden die Coordinaten des Punktes D positiv genommen, dann liegt φ auf Seite der negativen Ordinaten, und muss demnach als Winkel im 4. Quadranten behandelt werden, oder aber als negativer Winkel. In beiden Fällen ist sein Cosinus positiv, sein Sinus negativ.

Nach den gegebenen Verhältnissen ist der Winkel φ bestimmt durch die drei Seiten des rechtwinklichen Dreieckes A J B. Man hat daher aus der Figur

$$\sin. \varphi = \frac{B\,J}{A\,B} = \frac{-\,11{,}861}{+\,19{,}00}$$

$$\cos. \varphi = \frac{A\,J}{A\,B} = \frac{+\,14{,}843}{+\,19{,}00}$$

log. 11,861 = 1,07412,	log. 14,843 = 1,17152
log. 19,00 = 1,27875,	log. 19,00 = 1,27875
log. sin. φ = 9,79537,	log. cos. φ = 9,89277
sin. φ = − 0,6243	cos. φ = + 0,7812

Diese Werte von sin. φ oder cos. φ würden, nach der Dezimaltheilung des Quadranten einem Winkel von $42^g,92$ entsprechen, ein Gradmaas, welches hier übrigens nicht weiter in Betracht kommt; es folgt vielmehr, nach (3) §. 11 (die logarithmische Bearbeitung, hier, wie im Reste dieses §. hinweggelassen)

$$x' = 18,46 \times 0,7812 + 8,74 \times - 0,6243 = + 8,965$$
$$y' = 8,74 \times 0,7812 - 18,46 \times - 0,6243 = + 18,352$$

Für den Punkt C ist gegeben

$$x = A\,C = + 33,63 \qquad y = 0$$

Das jetzige x' aber ist bezeichnet durch A G, y' durch C G; φ bleibt das Gleiche wie so eben.

Hiernach $\qquad x' = 33,63 \times 0,7812 = + 26,272$

$$y = - 33,63 \times - 0,6243 = + 20,994.$$

II. Gleiche Figur. Der Punkt O ward ursprünglich vestgelegt durch Fällen des Perpendikels O P auf die Seite D C und durch Messen desselben, so wie des Abschnittes D P. Man verlangt die Reduction auch dieser Coordinaten auf die Grundlinie A B, nämlich den Perpendikel O U = y' und den Abschnitt A U = x'. Aus der Zeichnung ist zu entnehmen

$$D\,P \text{ oder } x = 12,20; \qquad O\,P \text{ oder } y = 2,42.$$

Lösung. Das Lagenverhältniss zwischen der neuen und der ursprünglichen Axe ist wie zuvor, es bleiben darum die Zeichen von sin. und cos. eben so. Wird nun durch D eine Parallele D Q zu A B gedacht, so ist C D Q gleich dem Neigungswinkel der Axe D C gegen die neue Axe, also das jetzige φ. Der Zeichnung zufolge ist D C = 17,51. D Q aber ist gleich F G, gleich der Differenz der so eben berechneten Abscissen A G

und A F, so wie C Q gleich ist dem Unterschiede der Ordinaten C G und D F; nämlich:

$$\begin{aligned} D\,Q &= 26{,}272 - 8{,}965 = +\ 17{,}307 \\ C\,Q &= 20{,}994 - 18{,}352 = +\ 2{,}642. \end{aligned}$$

Demnach $\sin.\ \varphi = \frac{2{,}642}{17{,}510} = -\ 0{,}1509$

$$\cos.\ \varphi = \frac{17{,}307}{17{,}510} = +\ 0{,}9950.$$

und somit

$$\begin{aligned} x' &= 12{,}20 \times 0{,}9950 + 2{,}42 \times -\ 0{,}1509 = +\ 11{,}695 \\ y' &= 2{,}42 \times 0{,}9950 - 12{,}20 \times -\ 0{,}1509 = +\ 4{,}233 \end{aligned}$$

Dies x' und y' sind die Werte von D R und O R. Weil aber der Anfangspunkt D nach A gerückt werden soll, haben noch die Berichtigungen des §. 11 statt zu finden, indem für x, und y' gesetzt wird, x' + a; y' + b. Aber a und b sind jetzt die schon berechneten Grössen A F und D F.

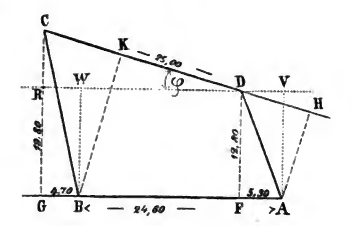
Daher endlich

$$\begin{aligned} x' &= 11{,}695 + 8{,}965 = +\ 20{,}660 \\ y' &= 4{,}233 + 18{,}352 = +\ 22{,}585. \end{aligned}$$

Bemerkung. Wäre O diesseits von D C gelegen, dann musste die Ordinate dieses Punktes als negativ in Rechnung genommen werden.

III. Die Coordinaten des Viereckes A B C D, Figur 17, deren Zahlenwerte dort beigeschrieben, beziehen sich auf die Grundlinie A B und auf A als Anfangspunkt. Diese Coordinaten sollen der Art umgewandelt werden, dass sie für die Gegenseite D C als Axe, und D als Anfangspunkt gelten.

Fig. 17.



Vorbereitung. Die gegebenen Coordinaten sind: für D, x = AF = 5,30, y = DF = 12,80; für C, x = AG = 29,30, y = CG = 19,80. Verlangt werden die Coordinaten von A und B. Was nun hiebei als das beziehungsweise x und y zu nehmen, wird klar werden, wenn man die ursprüngliche Axe AG vorerst parallel zu ihr selbst nach VR gerückt denkt, so dass F nach D falle. Zählt man dabei die positiven Abscissen von D gegen R und die positiven Ordinaten nach der Linken von DR, dann wird zu setzen seyn: für A: x oder DV = — AF = — 5,30; y oder AV = DF = + 12,8. Für B: x oder DW = FB = + 19,30; y oder BW = FD = + 12,80. Die Coordinaten von C aber werden seyn: x oder DR = FG = + 24,00; y oder RC = CG — FD = — 7,00.

Lösung. CDR ist nun der Winkel φ und weil die Hypothenuse DC zu 25,00 angegeben, bleibt zu setzen

$$\sin.\ \varphi = \frac{C\,R}{C\,D} = \frac{7{,}00}{25{,}00} = -\ 0{,}280$$

$$\cos.\ \varphi = \frac{R\,D}{C\,D} = \frac{24{,}00}{25{,}00} = \quad 0{,}960$$

denn φ ist hier abermal als Winkel im vierten Quadranten zu nehmen.

Für A:

DH oder $x' = - \ 5{,}30 \times 0{,}96 + 12{,}80 \times -0{,}28 = - \ 8{,}672$
AH oder $y' = + \ 12{,}8 \times 0{,}96 - (-5{,}30) \times -0{,}28 = + 10{,}804$

Für B:

DW oder $x' = 19{,}30 \times 0{,}96 + 12{,}80 \times -0{,}28 = + \ 14{,}944$
WB oder $y' = 12{,}80 \times 0{,}96 - 19{,}30 \times -0{,}28 = + \ 17{,}692$

Für C:

DC oder $x' = 24{,}0 \times 0{,}96 + (-7{,}0) \times -0{,}28 = + 25{,}00$
$y' = - \ 7{,}0 \times 0{,}96 + 24{,}80 \times -028 = 0.$

Dies letztere Ergebniss kann als Probe gelten für die Statthaftigkeit der ganzen Behandlung.

§. 14.

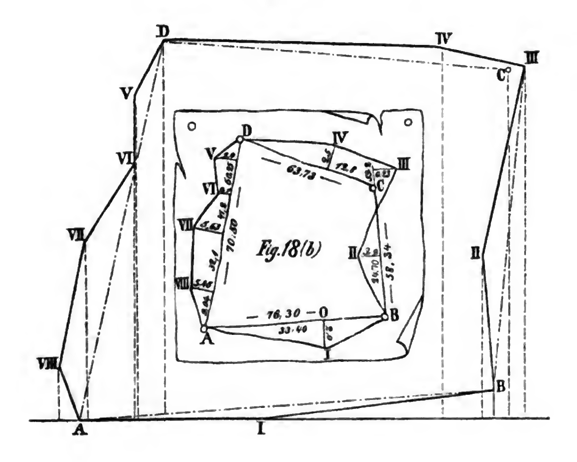
Fortsetzung der Beispiele.

Vierter Fall. Von dem Polygone, welches in Figur 18 (b) durch einen Handriss in Figur 18 aber durch Reinzeichnung dargestellt ist, verlangt man die Coordinaten seiner sämmtlichen Ecken, wobei die Seite A I als Axe genommen werden soll.

Zur Aufnahme war in das Polygon ein grosses Viereck A B C D gelegt. Die Ecken II bis VIII aber durch Ordinaten auf je eine Vierecksseite, als einstweiliger Axe bezogen worden Das Ergebniss der Messung des Viereckes findet man in den beiden mittleren Spalten der nachfolgenden Tafel. Abscissen und Ordinaten der übrigen Punkte sind dem Handrisse zu entnehmen.

Station.	Entfernung.	Winkel	
		gemessene.	verbesserte.
A	76,30	$81^{g},98$	$82^{g},00$
B	58,34	106, 94	106, 96
C	63,73	102, 74	102, 76
D	70,50	108, 26	108, 28
Summe . .		$339^{g},92$	$400^{g},00$

Fig. 18.



I. Coordinaten des Vierecks.

Zufolge dessen, was in §. 10 vorgetragen, besteht das Geschäft der Coordinatenberechnung nach gemessenen Seiten und Winkeln eines Polygones aus folgenden Momenten:

A. Zusammenstellen der beobachteten Winkel und etwaige Correction derselben.

B. Ableitung der Neigungswinkel nach der Formel

$$\alpha^{(m)} = \alpha^{(m-1)} + P^{(m)} - 200^{g}.$$

C. Berechnen der Coordinaten-Differenzen oder der Produkte

$$s \cos. \alpha; \quad s \sin. \alpha.$$

D. Zusammenstellen der positiven, wie negativen Δ x und Δ y und etwaige Ausgleichung des Unterschiedes ihrer bezüglichen Summen.

E. Addition der Coordinaten je eines vorhergehenden Punktes zu den Δ x und Δ y des nachfolgenden Eckes.

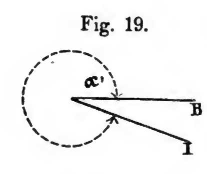
A. Verbesserung der Polygonwinkel.

Theoretisch sollte die Summe der inneren Winkel eines Viereckes 400 Grade betragen; die gemessenen Winkel aber geben eine Summe von $399^{g},92$. Da im gegenwärtigen Falle kein Grund vorliegt, irgend einer der vier Winkelbeobachtungen mehr oder weniger Zuverlässigkeit zuzuschreiben als den andern, bleibt nur das Mittel, allen vier Winkeln das Fehlende zu gleichen Theilen, d. i zu + 2 Dezimalminuten beizuschlagen. Eine Ausgleichung der Art wird unter Fällen, wie der vorliegende, d. i. wobei die Polygonseiten nicht einmal die Länge von 100 Ruthen überschreiten, immer als zulässig erachtet werden dürfen. Es stellen sich dadurch die Winkel, wie sie die 4. Spalte aufführt.

B. Berechnung der Neigungswinkel.

Weil die Polygonseite A I als Axe der Coordinaten genommen werden soll, ist B A I der erste Neigungswinkel oder α'. Nach den Angaben des Handrisses erscheint dies α' als spitzerer Winkel eines rechtwinklichen Dreieckes A O L, worin die beiden Catheten gegeben sind, nämlich der Abschnitt A O = 33,40 und der Perpendikel O I = 2,004. Das Verhältniss dieser Catheten ist $\frac{2{,}004}{33{,}40} = 0{,}060 = \text{tang. } IAO$.

Fig. 19.



Nach den trigonometrischen Tafeln entspricht dieser Wert der Tangente einem Winkel von $3^g{,}82$, welcher jedoch noch nicht als eigentlicher erster Neigungswinkel, oder als richtiges α' genommen werden darf. Denn weil beim Berechnen der Neigungswinkel von der Linken zur Rechten gegangen werden muss, (das Polygon im Gesicht haltend), und weil die Axe, oder eine Parallele zu ihr jedesmal der Schenkel *links* ist, darf nicht das obige $3^g{,}82$, sondern es muss seine Ergänzung zu 4 Rechten, nämlich $396^g{,}18 = \alpha'$ genommen werden.

In der nachfolgenden Berechnung sieht man Anfangs der ersten Zeile den Punkt B, dessen Coordinaten-Differenzen zuerst zu berechnen sind, neben ihm den gegebenen ersten Neigungswinkel, und, der Uebersicht bei nachfolgender Rechnung wegen, zur Seite noch aus dem obigen Messregister die Seite A B oder s'. Unter dem Werte von α' steht, gleichfalls dem Messregister entnommen, der zweite oder der Polygonwinkel B und hierunter in einer Linie mit C und s'' etc., die um 200^g verminderte Summe der genannten Posten oder das α''.

Punkte	Neigungswinkel		Seiten.	
B	396,^{g}18	$= \alpha'$	76,30	$= s'$
	106, 96			
C	303, 14	$= \alpha''$	58,34	$= s''$
	102, 76			
D	205, 90	$= \alpha'''$ . . .	63,73	$= s'''$
	108, 28			
A	114, 18	$= \alpha''''$ . . .	70,50	$= \alpha''''$
	82, 00			
B	196,^{g}18	$= \alpha'$.		

In Bezug auf vorstehende Rechnung bemerkt man noch: nachdem zum letzten Neigungswinkel α'''' der erste Polygonwinkel addirt worden, musste man nothwendig den ersten Neigungswinkel α' wieder erhalten, und hierdurch die Rechnung in sich selbst abschliessen. Wäre die unter A vorgenommene Ausgleichung der Polygonwinkel unterlassen worden, dann hätte die ganze Fehlersumme in dem Neigungswinkel der letzten Seite erscheinen müssen. Nun aber trat hier noch der Fall ein, dass von $114^g,18 + 82^g,00 = 196^g,18$ zwei rechte Winkel oder 200^g nicht abgezogen werden konnten, ohne einen negativen Neigungswinkel zu erhalten. Dies hätte nun an sich keine Schwierigkeit herbeigeführt, wohl aber eine Ungleichförmigkeit in Behandlung der Rechnung, welcher man dadurch ausweicht, dass man zu dem α'''' zuerst 400^g addirt denkt (denn dies verändert die Neigung gegen die Axe nicht) und dann erst die 200^g in Abzug bringt. Aehnlich wird man sich in allen gleichnamigen Fällen verhalten. Mit kurzen, als Regel zu behaltenden Worten: wo von der Summe $\alpha + P$ die 200^g nicht abgezogen werden können, addirt man zur Summe noch diesen Betrag.

C. Berechnung der Coordinaten-Differenzen.

Diese besteht in der logarithmischen Berechnung der Produkte s cos. α und s sin. α. Die erste Zeile jeder unten stehenden Einzelrechnung enthält den Log. der trigonometrischen Funktion, die zweite Zeile den Log. der Seite, wie sie in *B* neben einander aufgeführt erscheinen. Unter beiden steht deren Summe mit der Bezeichnung log. Δ x, log. Δ y, und darunter als Δx oder Δy die hiezu gehörige Zahl mit ihrem algebraischen Vorzeichen + oder — *).

Punkt B.

Abscissen.	Ordinaten.
log. cos. 396ᵍ,18 = 9,99922	log. sin. 396ᵍ,18 = 8,77792
log. 76,30 = 1,88252	log. 76,30 = 1,88252
log. Δ x' = 1,88174	log. Δ y' = 0,66044
Δx' = + 76,163	Δ y' = — 4,575
0	6
vorhergh. x = 0,000	*vorhergh.* y = 0,000
x' = + 76,160	y' = — 4,576

Punkt C.

Abscissen.	Ordinaten.
log. cos. 303ᵍ,14 = 8,69287	log. sin. 303ᵍ,14 = 9,99947
log. 58,34 = 1,76597	log. 58,34 = 1,76597
log. Δ x'' = 0,45884	log. Δ y'' = 1,76544
Δx'' = + 2,876	Δ y'' = — 58,270
5	7
vorhergh. x = + 76,160	*vorhergh.* y = — 4,576
x'' = + 79,035	y'' = — 62,853

*) In Bezug auf das Aufschlagen der log. sin. und log. cos., welche zu Winkeln im 2., 3. und 4. Quadranten gehören, wird es vielleicht nicht über-

Punkt D.

Abscissen.		Ordinaten.	
log. cos. 205^g,90 =	9,99813	log. sin. 205^g,90 =	8,96635
log. 63,73 =	1,80434	log. 63,73 =	1,80434
log. Δ x''' =	1,80247	log. Δ y''' =	0,77069
Δ x''' =	— 63,456	Δ y''' =	— 5,898
	60		9
vorhergh. x =	+ 79,035	*vorhergh.* y =	— 62,853
x''' =	+ 15,575	y''' =	— 68,752

Punkt A.

log. cos. 114^g,18 =	9,34420	log. sin. 114^g,18 =	9,98914
log. 70,50 =	1,84819	log. 70,00 =	1,84819
log. Δ x'''' =	1,19239	log. Δ y'''' =	1,83733
Δ x'''' =	— 15,574	Δ y'''' =	+ 68,752
	5		52
vorhergh. x =	+ 15,575	*vorhergh.* y =	— 68,752
x'''' =	0	y'''' =	0

D. Zusammenstellung der Δ x und Δ y.

+ Δ x		— Δ x		+ Δ y		— Δ y	
B . . .	76,163	D . . .	63,456	A . . .	68,760	B . . .	4,575
C . . .	2,876	A . . .	15,574		743	C . . .	58,270
	79,039		79,030		0,017	D . . .	5,898
	030						68,743
	0,009						

flüssig seyn, an die praktische Regel zu erinnern: wenn a ein spitzer Winkel, sucht man anstatt des log. sin. (200^g + a) und log cos. (200 + a) schlechtweg

Eine vollkommene Gleichheit in den Summen der positiven und der negativen Abscissen- und Ordinaten-Differenzen setzt eine vollkommene Genauigkeit der Linienmessung voraus, oder eine Zufälligkeit. Auf beides darf man in der Praxis nicht rechnen. In den Fällen einer Vermessung, wie wir sie hier behandeln, wird man stets beruhigt seyn dürfen, wenn die Unterschiede der fraglichen Summen $^1/_2$ Prozent derselben nicht erreichen, oder doch nicht übersteigen.

In unserm Beispiele stimmen die positiven und negativen Δ x zusammen auf 0,9 Zolle, was ganz unerheblich erscheint.

Selbst der Unterschied von 1,7 Zollen in den Summen der Δ.Δ y beträgt nur $^1/_{4000}$ von jeder, und ist hier auch als bedeutungslos zu betrachten. Will man eine Ausgleichung dennoch vornehmen, so ist der halbe Unterschied bei den Posten der zu kleinen Summen in Aufrechnung, bei den andern aber in Abrechnung zu bringen, und zwar nach Verhältniss des Wertes der einzelnen Posten. Diese Verbesserungen sind oben unter *C* angebracht und die betroffenen Ziffern durchstrichen worden.

E. Addition der Differenzen.

A ist in unserm Beispiele Anfangspunkt der Coordinaten, für diesen Punkt also x = 0, y = 0. Für B ist das verbesserte Δ x' = + 67,160 zugleich auch die Abscisse x', sowie das verbesserte Δ y' = — 4,576 die Ordinate y'. Diese Werte sind als vorhergehendes x und vorhergehendes y unter das verbesserte Δ x'' und Δ y'' für den Punkt C gesetzt und addirt

---

den log. sin. a, log. cos. a. Dagegen bei Winkeln von dem Werte 100^g + a oder 300^g + a sucht man mit Hinweglassen der 100^g oder 300^g wieder nur den log. sin. a oder log. a, setzt aber den einen an die Stelle des andern, doch alles dies ohne die Regel der Zeichen zu beeinträchtigen. Der Grund hiezu liegt nahe, denn es ist bekanntlich cos. (100^g + a) = — sin. a, oder (sin. 300^g + a) = — cos. a etc.

worden, wodurch sich fand: für C, $x'' = + 79{,}035$, $y'' = - 62{,}853$. Diese Werte ihrerseits beim Punkte D als vorhergehendes x und y unter $\Delta x'''$ und $\Delta y'''$ gesetzt, geben: $x''' = + 15{,}575$, $y''' = - 68{,}752$. Durch Addition der letzteren Werte zu den $\Delta x''''$ und $\Delta y''''$ des Punktes A folgt $x'''' = 0$, $y'''' = 0$ und es schliesst sich somit die Rechnung und gibt, auf Zolle abgerundet, folgendes Resultat:

Punkte.	Abscissen.	Ordinaten.
A	0,0	0,0
I	+ 33,40	0,0
B	+ 76,16	— 4,58
C	+ 79,04	— 62,85
D	+ 15,58	— 68,75

II. Reduction der übrigen Coordinaten auf die Axe A I.

Ecken an der Seite B C. Hier wie bei den übrigen Seiten ist das jedesmalige φ gleich dem vorhin, unter *B* berechneten α; jetzt also $\varphi = 303^g{,}14$.

Für II ist $x = + 24{,}70$, $y = - 3{,}20$.
Für III „ $x = + 59{,}20$, $y = + 0{,}23$.

Die Coordinaten von B wurden gefunden

$$a = 76{,}16 \qquad b = - 4{,}58.$$

Die Logarithmen für sin. φ, cos. φ können aus *C* entnommen werden. Nach den Entwicklungen in §. 11, und unter Rücksichtnahme darauf, dass die Figur ganz auf der Seite negativer Ordinaten liegt, folgt sofort:

Punkt II.

$\log. \; 24{,}70 = 1{,}39270$
$\log. \cos. \; 303^{g}{,}14 = 8{,}69287$
$\log. \; x \cos. \varphi = 0{,}08557$
$x \cos. \varphi = +\; 1{,}218$

$\log. -3{,}20 = 0{,}50515$
$\log. \sin. \; 303^{g}{,}14 = 9{,}99947$
$\log. \; y \sin. \varphi = 0{,}50462$
$y \sin. \varphi = +\; 3{,}196$

$+\; 1{,}218$
$-\; 3{,}196$
$-\; 1{,}978$
a *(Abscisse von B)* $= +\; 76{,}160$
$x' = +\; 74{,}182$

$\log. -3{,}20 = 0{,}50515$
$\log. \cos. \; 303^{g}{,}14 = 8{,}69287$
$\log. \; y \cos. \varphi = 9{,}19802$
$y \cos. \varphi = -\; 0{,}158$

$\log. \; 24{,}70 = 1{,}39270$
$\log. \sin. \; 303^{g}{,}14 = 9{,}99947$
$\log. \; x \sin. \varphi = 1{,}39217$
$x \sin. \varphi = -\; 24{,}670$

$-\; 0{,}158$
$-\; 24{,}670$
b *(Ordinate von B)* $= -\; 4{,}576$
$y' = -\; 29{,}404$

Punkt III.

$\log. \; 59{,}20 = 1{,}77232$
$\log. \cos. \; 303^{g}{,}14 = 8{,}69287$
$\log. \; x \cos. \varphi = 0{,}46519$
$x \cos. \varphi = +\; 2{,}919$

$\log. \; 0{,}23 = 9{,}36173$
$\log. \sin. \; 303^{g}{,}14 = 9{,}99947$
$\log. \; y \sin. \varphi = 9{,}36120$
$y \sin. \varphi = -\; 0{,}230$

$2{,}919$
$0{,}230$
$a = 76{,}160$
$x' = +\; 79{,}309$

$$\begin{aligned} \log.\ 0{,}23 &= 9{,}36173 \\ \log.\ \cos.\ 303^g{,}14 &= 8{,}69287 \\ \hline \log.\ y\ \cos.\ \varphi &= 8{,}05460 \\ y\ \cos.\ \varphi &= +\ 0{,}01134 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log.\ 59{,}20 &= 1{,}77232 \\ \log.\ \sin.\ 303^g{,}14 &= 9{,}99947 \\ \hline \log.\ x\ \sin.\ \varphi &= 1{,}77179 \\ x\ \sin.\ \varphi &= -\ 59{,}128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\ 0{,}0113 \\ &-\ 59{,}128 \\ \hline &-\ 59{,}117 \\ b = &-\ \ 4{,}575 \\ \hline y' = &-\ 63{,}692 \end{aligned}$$

An der Seite C D: Punkt IV.

Gegeben sind x = 12,80, y = 2,50; gefunden ward φ oder das vorige $\alpha''' = 205^g{,}90$. Die übrigen Verhältnisse sind den vorigen gleichstehend, es ergibt sich daher, die logarithmischen Einzelheiten weggelassen

$$\begin{aligned} 12{,}80\ \cos.\ 205^g{,}90 &= -\ 12{,}745 \\ -\ 2{,}50\ \sin.\ 205^g{,}90 &= +\ \ 0{,}231 \\ a &= +\ 79{,}035 \\ \hline x' &= +\ 66{,}521 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2{,}50\ \cos.\ 205^g{,}90 &= -\ \ 2{,}489 \\ 12{,}80\ \sin.\ 205^g{,}90 &= -\ \ 1{,}184 \\ b &= -\ 62{,}853 \\ \hline y' &= -\ 66{,}526 \end{aligned}$$

Was schliesslich die Punkte an der Seite A D anlangt, so ist hier das frühere $\alpha'''' = 114^g{,}18$ in der Richtung D A giltig,

während die Abscissen des Handrisses in der Richtung AD notirt wurden.

Aus diesem Umstande erscheint es passend als φ nicht jene obige Inclination zu nehmen, sondern deren Supplement $= 85^{g},82$. Dann gestalten sich die Verhältnisse wieder wie in den vorhergehenden Fällen, und das Ergebniss der ausgeführten Rechnung ergibt:

für den Punkt	war gegeben	man findet
V	$x = + 60{,}25$ $y = + 2{,}90$	$x' = + 10{,}48$ $y' = - 59{,}40$
VI	$x = + 47{,}20$ $y = + 0{,}10$	$x' = + 10{,}30$ $y' = - 46{,}05$
VII	$x = + 32{,}10$ $y = + 5{,}63$	$x' = + 1{,}60$ $y' = + 32{,}55$
VIII	$x = + 9{,}04$ $y = + 5{,}46$	$x' = - 3{,}33$ $y' = - 10{,}02$

§. 15.

Fortsetzung.

Nicht unhäufig tritt bei Aufnahmen der Fall ein, dass die zu messenden Umfangslinien keineswegs auf die wahren Gränzen, sondern nur in ihrer Nähe hingelegt werden können. Allein bei geodätischen Theilungen muss stets von den wirklichen Gränzen ausgegangen werden, soll die Rechnung nicht eine ermüdende Länge erhalten. Wie man sich bei solchem Vorkommnisse zu benehmen habe, dafür gibt die vorige Aufgabe bereits ein Beispiel, indem die Coordinaten des Gränzpunktes III abgeleitet worden sind, während der Stationort C nur in der Nähe von III genommen werden konnte. Das Nachfolgende soll zu noch näherer Erläuterung dienen.

Das Feldstück, wovon Fig. 20 den richtigen Umfang darstellt, Fig. 20 (b) aber den Handriss der Aufnahme, ward, wie letzterer

Fig. 20.

zeigt, durch Umfangsmessung bestimmt. Aber an den Ecken I, II, III war es nicht thunlich, den Winkelmesser aufzustellen, man musste vielmehr bei B, C, D jeweils in der Nähe eines dieser Gränzpunkte Station nehmen und so verfahren, dass dadurch, wie beabsichtigt, die Coordinaten von I, II und III in Bezug auf die Grundlinie A I berechnet werden konnten. Zu dem Ende hat man aus den genannten Gränzpunkten Perpendikel auf die nebenliegenden Polygonseiten gefällt, wobei es an den Ecken II und III gerichtet werden konnte, dass die Fusspunkte C, D der Perpendikel zugleich Standorte des Instrumentes wurden.

Das Ergebniss der Messung zeigt folgendes Register

Stationen.	Seiten.	verbesserte Winkel.
A	40,10	92^g,55
B	21,83	90 ,69
C	22,51	168 ,01
D	19,50	166 ,10
E	47,23	82 ,35
Summa . .		600 ,00

Gegebener Bedingung zufolge war I A O als *erster* Neigungswinkel zu nehmen. Dieser Winkel ist hier wieder gegeben durch die Catheten A I, O I eines rechtwinklichen Dreieckes und man hat daher

$$\text{tang. A} = \frac{\text{O I}}{\text{A I}}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \text{log. I O} &= \text{log. } 0{,}207 = 9{,}31597 \\ \text{log. A I} &= \text{log. } 39{,}78 = 1{,}59966 \\ \hline \text{log. tang. A} &= 7{,}71631 \end{aligned}$$

Dieser log. tang. gehört zu einem Winkel von 0^g,33 (oder von 18′ alter Theilung), was somit das Gradmaass des ersten Neigungswinkels ist.

Hiernach ergeben sich die folgenden Neigungen:

B . . . 0^g,33 . . = α'		. . 40,10 . . = s′
90,69		
C . . . 291,02 . . = α''		. . 21,83 . . = s″

Uebertrag	. . 291,02 . . = α''	
	168,01	
D	. . . 259,03 . . = α'''	. . 22,51 . . = s'''
	166,10	
E	. . . 225,13 . . = α''''	. . 19,50 . . = s''''
	82,35	
A	. . . 107,48 . . = α'''''	. . 47,23 . . = s'''''
	92,85	
	9^g,33	

Als vorläufige Coordinaten ergaben sich: (die Rechnung wie früher geführt)

Punkte.	Abscissen.	Ordinaten.
A	+ 0,0	+ 0,0
B	+ 40,10	— 0,21
C	+ 37,03	— 21,40
D	+ 23,53	— 39,40
E	+ 5,53	— 46,90

Umwandlung der Coordinaten von I, II, III.

Punkt I.

Der Winkel φ ist für diesen Punkt wieder das α' der vorhergegangenen Coordinatenberechnung, nämlich $\varphi = 0^g,33$, A B alte, A I neue Axe, $x = 39,78$, $y = 0,207$.

$$\log. 39{,}78 = 1{,}59966 \qquad \log. 0{,}27 = 9{,}31597$$
$$\log. \cos. 0^g{,}33 = 9{,}99999 \qquad \log. \sin. 0^g{,}33 = 7{,}71489$$
$$\log. x \cos. \varphi = 1{,}59965 \qquad \log. y \sin. \varphi = 7{,}03086$$
$$x \cos. \varphi = + 39{,}778 \qquad y \sin. \varphi = + 0{,}001$$

$$+ 39{,}778$$
$$+ \ 0{,}001$$
$$x' = + 39{,}78$$

$$\log. 0{,}207 = 9{,}31597 \qquad \log. 39{,}78 = 1{,}59966$$
$$\log. \cos. 0^g{,}33 = 9{,}99999 \qquad \log. \sin. 0^g{,}33 = 7{,}71498$$
$$\log. y \cos. \varphi = 9{,}31596 \qquad \log. x \sin. \varphi = 9{,}31455$$
$$y \cos. \varphi = + 0{,}207 \qquad x \sin. \varphi = + 0{,}206$$

$$0{,}207$$
$$0{,}206$$
$$y' = 0{,}00$$

Diese Ergebnisse für x′ und y′ waren übrigens vorherzusehen.

Punkt II.

Man denke sich für einen Augenblick B als den Anfangspunkt der Coordinaten. Man denke sich ferner als neue Axe eine Parallele zu AI, welche durch B geht, so wird erkannt werden, dass im jetzigen Falle $\varphi = \alpha'' = 291^g{,}02$ zu setzen sey. Ausserdem war gegeben:

$$x = + 21{,}83, \qquad y = - 0{,}40.$$

Zuletzt bleibt noch der Anfangspunkt nach A zu versetzen, also bei x′ die Correction $+ a = + 40{,}10$ und bei y′ die Berichtigung $+ b = + 0{,}21$ anzubringen.

log. 21,83 = 1,33905	log. 0,4 = 9,60206
log. cos. 291,02 = 9,14795	log. sin. 291,02 = 9,99569
log. x cos. φ = 0,48700	log. y sin. φ = 9,59775
x cos. φ = − 3,069	y sin. φ = + 0,396
log. 0,4 = 9,60206	log. 21,83 = 1,33905
log. cos. 291,02 = 9,14795	log. sin. 291,02 = 9,99569
log. y cos. φ = 8,75001	log. x sin. φ = 1,33474
y cos. φ = + 0,056	x sin. φ = − 21,615
− 3,069	− 21,615
− 0,396	+ 0,056
− 3,465	− 21,559
+ a = + 40,100	+ b = + 0,207
x′ = + 36,635	y′ = − 21,352

Punkt III.

In der Behandlung kein Unterschied zwischen dem Vorhergehenden.

$$\varphi = \alpha''' = 259^g{,}03;\ x = +\ 22{,}51;\ y = 0{,}10;$$
$$a = +\ 37{,}03,\ b = -\ 21{,}40.$$

log. 22,51 = 1,35237	log. 1,0 = 0,00
log. cos. 259,03 = 9,77818	log. sin. 259,03 = 9,90307
log. x cos. φ = 1,13055	log. y sin. φ = 9,90307
x cos. φ = − 13,507	y sin. φ = + 0,799
log. 1,0 = 0,0	log. 22,51 = 1,35237
log. cos. 259,03 = 9,77818	log. sin. 259,03 = 9,90307
log. y cos φ = 9,77818	log. x sin. φ = 1,25544
y cos. φ = 0,600	x sin. φ = − 18,007

$$
\begin{array}{rr}
 & -\ 13{,}507 \\
 & -\ \ 0{,}799 \\
\hline
 & -\ 14{,}306 \\
+\,a = & +\ 37{,}03 \\
\hline
x' = & +\ 22{,}724
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & +\ \ 0{,}600 \\
 & -\ 18{,}007 \\
\hline
 & -\ 17{,}407 \\
b = & -\ 21{,}40 \\
\hline
y' = & -\ 38{,}807
\end{array}
$$

Die Seiten von I bis E können schliesslich aus den Coordinaten-Differenzen, wie E Q, III Q àls Hypothenusen rechtwinklicher Dreiecke E Q III abgeleitet werden.

Das gewöhnliche Rechnen nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist dabei umständlich; man wird leichter zum Ziel kommen durch Einführen des einen Winkels dieser Dreiecke, welcher m heissen mag. Z. B. für die Seite II III $= s''$ ist zu entnehmen:

$$\Delta x = 13{,}911, \quad \Delta y = 17{,}461$$

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ 13{,}911 & = 1{,}14336 \\
\log.\ 17{,}461 & = 1{,}24207 \\
\hline
\log.\ \text{tang.}\ m & = 9{,}90129 = \log.\ \text{tang.}\ 42^{g}{,}8270.
\end{array}
$$

Nun $\quad s'' = \Delta y \times \sec.\ m = \dfrac{\Delta y}{\cos.\ m}$. [§. 12. (2)]

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ 17{,}461 & = 1{,}24207 \\
\log.\ \cos.\ 42^{g}{,}8270 & = 9{,}89328 \\
\hline
\log.\ s'' & = 1{,}34879 \quad s'' = 22{,}325.
\end{array}
$$

Das Ergebniss der ganzen Rechnung wird aus nachstehender Tabelle ersichtlich.

Punkte.	Coordinaten.		Seiten.	
	Abscissen.	Ordinaten.	Bezeichn.	Längen.
A (Anfang)	0,0	0,0	E A	47,23
I	+ 39,78	+ 0,0	A I	39,78
II	+ 36,64	− 21,35	I II	21,57
III	+ 22,72	− 38,81	II III	22,33
E	+ 5,53	− 46,90	III E	19,01

Anmerkung. In diesem letzten Beispiel ist ein häufig vorkommender Fall behandelt: Ein Grundstück soll durch Umfangsmessung aufgenommen werden, dasselbe ist aber mit einer Planke, einem Haag oder Aehnlichem eingefriedigt, so dass das Winkelinstrument nicht unmittelbar über den Ecken der Grenze aufgestellt werden kann. Man legt daher ein Hilfspolygon so nahe als möglich um das gegebene, dergestalt, dass die Ecken, wie II, III in Fig. 12, wo das Instrument steht, zugleich die Fusspunkte der Perpendikel sind, welche aus den Gränzpunkten C, D . . . auf die Seiten des Hilfspolygons gefällt werden.

Man berechnet die Coordinaten des Hilfspolygons wie gewöhnlich; wenn dies geschehen und die etwaigen Unterschiede in die Summen der positiven und negativen Coordinaten - Differenzen nach Verhältniss der Seitenlängen ausgeglichen sind, bringt man bei jeder Abscisse, d. i. bei jedem x, die Verbesserung an $+ y \sin. \alpha$, und bei jeder Ordinate, d. i. bei jedem y, die Verbesserung $y \cos. \alpha$, wo y den Abstand des Eckpunktes von dem Standort des Instrumentes, oder, mit andern Worten, der Excentricität des Standortes bedeutet. Da nun dies y stets willkürlich, also der Art gewählt werden kann, dass es $= 1{,}0$ oder wenigstens eine runde Zahl von Fussen etc. beträgt, so bedient

man sich zu der kleinen Rechnung bequem der natürlichen Sinus und Cosinus, oder auch der Coordinatentafeln von *Ulffers*.

Die Correctionen ± a und ± b beendigen die Rechnung.

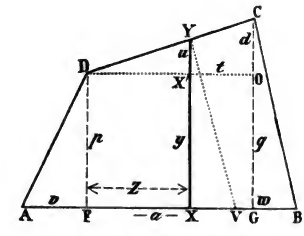
Dies ist das geeignete Verfahren in einem Fall, worin sich, wie uns bekannt, manche Geometer nur schwer zu helfen wissen.

§. 16.

A. Parallel-Theilung.

Wir beginnen wieder mit der Theilung des *Viereckes*, auf welchen Fall wir immer unsere Aufgabe zurückzuführen bestrebt seyn werden.

Fig. 21.



Als Normalviereck gilt uns ein solches, dessen Coordinaten nach *einer* Seite hin wachsen, wie A D C B. Figur 17.

Wiederholungen zu vermeiden, sollen die gleichen Grössen stets durch gleiche Buchstaben bezeichnet werden, nämlich:

Die Grundlinie A B mit a.
Die Perpendikel D F mit p, C G mit q.
Der Abschnitt A F mit v, B G mit w.

Zur Berechnung des Inhaltes *J* werden wir die zwei nachstehenden Formeln gebrauchen,

$$\left.\begin{array}{r}(a - w)\,p + (a - v)\,q = \\ a\,(p + q) - p\,w - q\,v = \end{array}\right\}\,2\,J.$$

welche sich aus dem offenbar richtigen Ausdruck entwickeln lassen:

$$v\,p + (p + q)\,(a - v - w) + w\,q = 2\,J.$$

Liegt einer oder der andere von den Abschnitten v und w nicht auf der Grund-Linie, sondern in deren Verlängerung, so muss sein Wert negativ in Rechnung genommen werden. Dieselben Abschnitte werden = 0 zu setzen seyn, wenn bei A oder B rechte Winkel. Das abzuschneidende Stück heisse *Q*.

Erste Grund-Aufgabe. *Es ist ein Viereck gegeben durch die Coordinaten seiner Eckpunkte, dasselbe soll durch eine Senkrechte auf die Abscissenlinie in gegebenem Verhältnisse getheilt werden.*

Erster Fall. Fig. 21. Die Grundlinie A B dient als Abscissenaxe. Y X sey die Theilungslinie, welche von der Linken gegen die Rechte ein Stück A X Y D = *Q* abschneidet; sie heisse y, der Abschnitt F X aber z.

Mittelst dieser Stücke hat man die Bedingungsgleichung:

$$v\,p + (p + y)\,z = 2\,Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Durch D gehe D O = F G parallel mit A B und werde gleich t gesetzt.

C O, der Unterschied zwischen p und q heisse d; X′ Y, der Unterschied zwischen p und y heisse u; endlich sey F X = D X′ = z; dann hat man

$$\frac{u}{z} = \frac{d}{t}$$

Die beständige Grösse $\frac{d}{t}$ sey = k = tang. C D O.

Von diesem Winkel, welcher hier nicht weiter in Betracht kommt, hängt übrigens das Wachsthum der Ordinaten ab, und k würde einen negativen Wert erhalten, wenn C unterhalb von O läge. *)

---

*) In Folge der Beziehungen tang. k = $\frac{\text{sin. k}}{\text{cos. k}}$, oder cot. k = $\frac{\text{cos. k}}{\text{sin. k}}$ [§. 12 (1)] sind Tangenten wie Cotangenten positiv, wenn Sinus wie Cosinus

Oben ist nun $u = z\,k$ und $y = p + u = p + z\,k$.

Diesen Wert von y in (1) eingeführt, gibt

$$z^2 k + 2 z p = 2 Q - v p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzet die Coefficienten von z^2 und z gleich K und L; die Grösse $v\,p = W$, dann folgt

$$z^2 K + z L = 2 Q - W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Auf diese allgemeine Form der Gleichungen des zweiten Grades werden wir all unsere Ausdrücke für die Theilung der Vielecke durch gerade Linien zurückführen. Die Bedingungen, wie die Theilungslinien gelegt werden sollen, mögen seyn, welche sie wollen.

In dem vorliegenden Fall hatte es nur geringen Nutzen, die Coefficienten der Gleichung (2) durch die allgemeinen Zeichen K, L und W zu ersetzen; allein wir wollten gleich von vornherein unsern Gang im Allgemeinen bezeichnen.

Mittelst einer kleinen vorläufigen Rechnung kann die Grösse $W = p\,v$ aus den Gleichungen (2) und (3) entfernt werden; denn sie bedeutet das Dreieck links der Ordinate p. Man ziehe den Inhalt von dem abzuschneidenden Stück ab, und bezeichne mit Q jetzt den Ueberrest, welcher von dem Trapeze F G C D noch dem Dreieck beigefügt werden muss, dann hat man

$$(p + y)\,z = 2\,Q,$$

$$z = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 2\,Q\,k}}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hier ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen gleich dem Werte der Theilungslinie X Y. Denn wegen:

---

einerlei Vorzeichen haben, also im ersten und dritten Quadranten, aus dem entgegengesetzten Grunde sind sie negativ zu nehmen im 2. und 4. Quadranten.

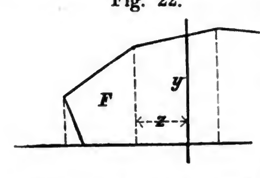
$$y = p + z k = \text{ist } z = \frac{y - p}{k}$$

und diesen Wert jenem aus der Gleichung (4) gleichgesetzt, kommt

$$y = \sqrt{p^2 + 2 Q k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Anstatt des Dreieckes A F D könnte links von p noch eine beliebige Figur F liegen, Fig. 22 (b), welche dem abzutrennenden Stücke angehört. Immerhin wird das Ganze durch die Ordinaten in rechtwinkliche Trapeze zerlegt, und nach einem vorläufigen Zusammenstellen erkennt man alsobald, in welches von diesen Trapezen die Theilungslinie fallen müsse. Q ist immer der hiervon abzutrennende Theil.

Fig. 22.



§. 17.

Einige Anwendungen.

Erstes Beispiel. Es sey v = 5; p = 18; q = 22; t = 20; w = 7 und der abzuschneidende Theil = 200.

Demnach	A F D	=	45
	F G C D	=	400
	G B C	=	77
	J	=	522

Man sieht, dass die Theilungslinie in das Trapez F G C D falle, und dass von diesem in der Richtung F C abzuschneiden sind 200 — 45 = 155 = Q.

Es ist d = 22 — 18 = 4, also k = 4 : 20 = 0,2
$p^2 = 324$.

$2\ Q\,K = 62;\quad y = \sqrt{324 + 62} = 19{,}647\ldots$ nach (5) §. 16.

$$z = \frac{-\ 18 + 19{,}647}{0{,}2} = 8{,}235.$$

Probe: $\dfrac{18 + 19{,}947}{2} \times 8{,}235 = 155{,}01 = Q.$

Die Theilungslinie kann, nachdem z bekannt, abgesteckt werden, allein es wird immer zweckmässig seyn, die Länge von D Y zu berechnen.

Da D C = 20,36, gibt sich

$$D\ Y = \frac{8{,}235 \times 20{,}36}{20} = 8{,}383.$$

Zweites Beispiel. Das Feld Fig. **23** *soll durch Senkrechte auf die Grundlinie* A I *in drei gleiche Theile getheilt werden.*

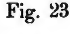
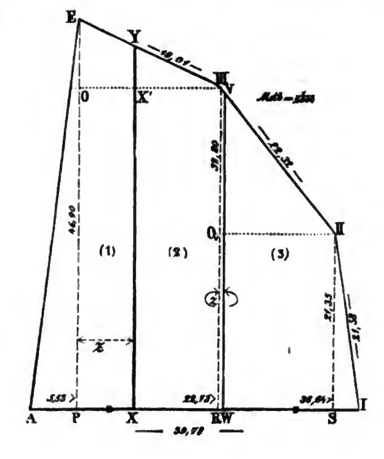


Fig. 23



Die Coordinaten dieses Fünfeckes sind in §. 15 abgeleitet worden, und Seite 72 aufgeführt.

Danach berechnet sich:

A P E	=	129,68
P E III R	=	737,02
R III II S	=	418,34
II S I	=	33,52
J	=	1318,56.

foglich jeder Theil = 439,52.

Berechnung der ersten Parcelle.

Die Theilungslinie X Y fällt in der Trapez P E III R.

Es ist . . . . Grösse der Parcelle = 439,52
ab das Dreieck A P E = 129,84

Rest . . . . = 309,68 = Q
619,68 = 2 Q

Nennen wir E P = p; R III = q; so ist q — p = — 8,1 = d.

(Der Wert von d und somit auch der Wert von k musste negativ genommen werden, weil die zweite Ordinate kleiner als die erste.)

t = A R — A P = 17,20.

log. 8,1 = 0,908485
log. 17,20 = 1,235528

log. k = 9,672957 k = — 0,4709
log. 2 Q = 2,792167

log. 2 Q k = 2,465124 2 Q k = — 291,826
p^2 = + 2199,610

$\sqrt{(1907,784)}$ = + 43,678 = y
— p = — 46,900

Zähler = — 3,222.

log. des Zählers = 0,508125
log. k = 9,672957 z = 6,8417 (positiv wegen der gleichen Zeichen im Zähler und Nenner.)
log. z = 0,835168

Probe: log. (p + y) = log. 90,578 = 1,957023
log. z = 0,835168
log 2 *Q* = 2,792191 2 *Q* = 619,713

Aus den gleichen Verhältnissen O X' : O III und E Y : E III findet sich

log. z = 0,83517
log. E III = log. 19,01 = 1,27898
compl. log. t = 8,76447
log. E y = 0,87862; E Y = 7,561.

Zweite Parcelle.

Man hat . . . . A R III E 866,70
Grösse zweier Theile = 2 *Q* 879,04
Unterschied oder jetziges *Q* = − 12,34

Diese 12,34 Quadratruthen sind demnach von dem Trapeze II III R S abzuschneiden.

Hier aber hat man R III = p; II S = q; q − p = 21,35 − 38,80 = − 17,45 = d; A S − A R = 36,64 − 22,73 = 13,91 = t.

log. d = 1,241795
log. t = 1,143327
log. k = 0,098468; k = − 1,2545
log. 2 *Q* = 1,392345
log. 2 *Q* k = 1,490813; 2 *Q* k = − 30,961

$$\begin{aligned} \text{Uebertrag} \ldots \quad 2\,Q\,k &= - \quad 30{,}961 \\ p^2 &= + \ 1505{,}968 \\ \sqrt{(1475{,}007)} &= + \ 38{,}405 = y \\ -\,p &= - \ 38{,}807 \\ \text{Zähler} &= - \quad 0{,}402 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{log. des Zählers} &= 9{,}604226 \\ \text{log. } k &= 0{,}098468 \\ \text{log. } z &= 9{,}505758;\ z = 0{,}3205 = \text{R W}. \end{aligned}$$

Probe: $\text{log. } (p + y) = \text{log. } 77{,}176 = 1{,}887482$

$$\begin{aligned} \text{log. } z &= 9{,}505758 \\ \text{log. } 2\,Q &= 1{,}393240;\ 2\,Q = 24{,}730 \end{aligned}$$

$$\text{III V} = \frac{\text{R W} \times \text{II III}}{\text{R S}}$$

$$\begin{aligned} \text{log. R W} = \text{log. } z &= 9{,}50582 \\ \text{log. II III} = 22{,}316 &= 1{,}34862 \\ \text{compl. log. } t &= 8{,}87975 \\ \text{log. III V} &= 9{,}73419;\ \text{III V} = 0{,}542. \end{aligned}$$

Dritte und letzte Parcelle:

Diese ist mit der zweiten schon völlig bestimmt; will man eine direkte Probe haben, kann deren Inhalt berechnet werden, er findet sich

$$\text{W S} = t - z = 13{,}91 - 0{,}31 = 13{,}59$$
$$\text{V W} + \text{II S} = 38{,}376 + 21{,}346 = 59{,}722.$$

log. 13,59 = 1,133219
log. 59,722 = 1,776134

2,909353 = log. 811,622

Halbirt . . . . . . = 405,811
Hiezu Dreieck R B C = 33,52

= 439,331 gleich der dritten Parcelle.

Bemerkungen. Beim Abstecken der Parcellen, z. B. der ersten wird man A X und E Y ausmessen und zur Probe sich etwa noch überzeugen, ob die obere Breite X' O der unteren P X gleich geworden. Allein bei dieser Arbeit wie bei der Aufnahme, wird man mit den gewöhnlichen Messwerkzeugen das Maas einer Linie nicht genauer als auf den halben Zoll oder anderthalb Centimeter verbürgen können. Rückt man die Theilungslinie X Y um einen halben Zoll zur Seite, so verändert dies den Flächeninhalt der Parzelle um 0,021 Quadratruthen, was übrigens nur $^1/_{20}$ Prozent der Parzelle beträgt, also ganz unerheblich ist. Man wird aber daraus entnehmen, dass bei den gewöhnlichen Theilungen einige Quadratfusse kaum mehr verbürgt werden können, es also auch unnöthig sey, die Rechnung in den Dezimalstellen weiter zu treiben, als wir es gethan.

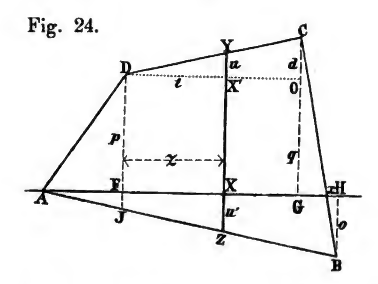
§. 18.

Die Axe hat eine beliebige Richtung.

Zweitens. Wir wollen annehmen, die Axe gehe in schiefer Richtung durch ein Eck des Viereckes, wäre es nicht der Fall, kann sie vorläufig durch paralleles Vorschieben so gelegt werden.

Fig. 19. A H die Abscissenaxe; Y Z die Theilungslinie, welche auf ihr senkrecht stehen soll; das abzuschneidende Stück,

Fig. 24.



vermindert um den Flächenraum des Dreieckes A J D, also J Z Y D heisse Q.

Die Coordinaten von B seyen A H = x, H B = o.

Das Verhältniss $\frac{o}{x}$ sey = i, und wie vorhin $\frac{d}{t} = k$, die Summe k + i aber sey = s.

Vorerst haben wir nun die Bedingungsgleichung

$$(D\,J + Y\,Z)\,F\,X = 2\,Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Da nun D J = D F + F J; aber D F = p, A F = v, und darum F J = v i, folgt D J = p + v i, ferner Y Z = X' X + X' Y + X Z = p + u + u' = y; aber u = k z, u' = i (z + v) folgt

$$y = p + k\,z + i\,z + i\,v = p + s\,z + v\,i.$$

Durch Einführung dieser Werte in (6) kommt

$$(2\,p + 2\,v\,i + z\,s)\,z = 2\,Q$$
$$z^2\,s + 2\,z\,(p + v\,i) = 2\,Q \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Den Coeffizienten von z = L gesetzt

$$z^2 + \frac{2\,z\,L}{s} = \frac{2\,Q}{s}$$

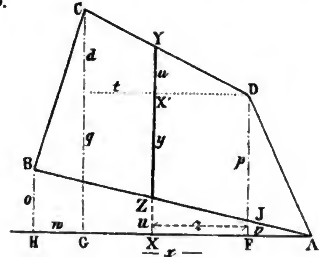
$$z = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 2\,Q\,s}}{s} \quad . \; . \quad (8)$$

in welchem Ausdruck die Wurzelgrösse wieder den Wert der Theilungslinie y angibt, was man aus gleichen Folgerungen wie oben ersieht.

Zweitens. Fig. 25. Die Axe liegt ausserhalb des Viereckes. Hier ist $D\,J = p - v\,i$

$$y = p + u - u' = p + k\,z - (z + v)\,i,$$

Fig. 25.



setzt man die Differenz $k - i = d$ und Q wieder gleich dem abzuschneidenden Stücke weniger dem Dreieck A J D, so findet sich

$$(2\,p - v\,i + d\,z)\,z = 2\,Q.$$

woraus $$z^2\,d + 2\,z\,(p - v\,i) = 2\,Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und für den Coeffizienten von z den Buchstaben L gebraucht.

$$z = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 2\,Q\,d}}{d}$$

Beispiel. Die Coordinaten des Viereckes Fig. 25 seyen:

A F = 1,872; D F = 18,881; A G = 20,488; C G = 27,296;
A H = 29,256; B H = 6,636.

Das abzuschneidende Stück = 200.

$$\text{Hieraus}\ \frac{d}{t} = \frac{8,415}{18,616} = 0,452 \quad = k$$

$$\frac{o}{x} = \frac{6,636}{29,256} = 0,2268 = i$$

$$\text{Differenz} = 0,2252 = d.$$

$$F\,J = 1,87 \times 0,2268 = 0,424.$$

$$\text{daher}\ \triangle\ A\,J\,D = A\,F\,D - A\,F\,J = \tfrac{1}{2}\left[(35,345 - (0,424 \times + 1,872)\right] = 17,44.$$

$$\text{oder} \qquad 200 - 17,44 = 182,56 = Q.$$

$$\text{somit}\quad z = \frac{-18,456 + \sqrt{340,624 + 82,224}}{0,2252} = 9,356.$$

Probe:

$$y = \sqrt{340,624 + 82,224} = 20,563$$

$$p - v\,i = 18,456$$

$$39,019.$$

$$\tfrac{1}{2}\,(39,019 \times 9,356) = 182,52$$

$$A\,F\,D = 17,44$$

$$199,97 = Q.$$

$$\text{Da ferner}\ A\,B = \sqrt{29,256^2 + 6,656^2} = 30,0$$

$$C\,D = \sqrt{18,616^2 + 8,415^2} = 20,43$$

$$\text{folgt}\ A\,Z = \frac{A\,X\,.\,A\,B}{A\,H} = 11,51;\ D\,Y = \frac{D\,X'.\,D\,C}{D\,O} = 10,27.$$

§. 19.

Fortsetzung der Parallelltheilung.

Zweite Grund-Aufgabe. *Es soll ein Viereck durch Parallelen zur Abscissenaxe in gegebenem Verhältniss eingetheilt werden.*

Fig. 26.

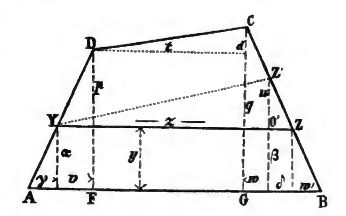


Fig. 26. Bei dem Viereck A B C D dient die Basis A B = a als Abscissenlinie, die ihr parallele Theilungslinie sey = z, die gleichen Ordinaten, ihre Endpunkte seyen y; v', w' seyen die zu y' y gehörigen Abschnitte der Grundlinie, sowie v und w die zu p und q gehörigen.

Hiernach hat man

$$y\,(a + z) = 2\,Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$z = a - v' - w'$$

Es sey $\dfrac{v}{p} = \dfrac{v'}{y} = m$, also $v' = m\,y$

$$\frac{w}{q} = \frac{w'}{y} = n, \text{ also } w' = n\,y.$$

Die Summe der Verhältnisse m + n sollen = s gesetzt werden, und darum

$$z = a - s\,y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Somit nach (1) $\quad (a + a - s\,y)\,y = 2\,Q$

$$s\,y^2 - 2\,a\,y = -\,2\,Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und $$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 2 Q s}}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Aus (2) folgt $y = \frac{a - z}{s}$; dies in die Gleichung (4) eingeführt, gibt

$$z = \sqrt{a^2 - 2 Q s}$$

Bemerkung. In unserem Normalviereck sind die Winkel an der Grundlinie als spitz angenommen; die Abschnitte v, w liegen darum auf der Grundlinie a und die Theilungslinie z muss kleiner seyn als jene. Man sieht leicht, dass die Verhältnisse

$$m = \frac{v}{p} \text{ und } n = \frac{w}{q}$$

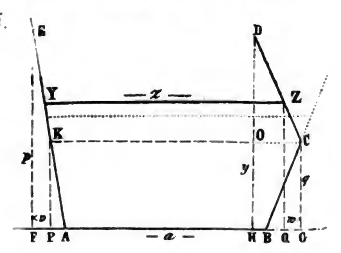
nichts anderes sind als die Cotangenten der Winkel A und B.

Sind nun diese Winkel stumpf, so fallen die Abschnitte v und w auf die *Verlängerungen* der Grundlinie und müssen als negative Grössen in Rechnung genommen werden, wie denn die Cotangenten stumpfer Winkel negativ sind. Die Summe s wird negativ, wenn entweder m mit n, oder das grössere von beiden negativ ist.

In beiden Fällen wird dann z grösser als a, und Zähler wie Nenner des Bruches (4) negativ.

Erstes Beispiel. Die Fig. 27 ist gegeben durch Coordinaten, wovon A B = a die Abscissenaxe.

Fig. 27.



$$A B = 53{,}60,\ A F = 5{,}5,\ E F = 30{,}0,\ B G = 4{,}3,$$
$$C G = 6{,}0;\ B H = 1{,}7,\ D H = 23{,}5.$$

Das abzuschneidende Stück Q sey 1 Morgen = 400 □°.

$$\frac{A F}{E F} = \frac{v}{p} = m = \frac{-5{,}5}{30{,}0} = -0{,}183$$
$$\frac{B G}{C G} = \frac{w}{q} = n = \frac{-4{,}3}{6{,}0} = -0{,}717$$
$$\overline{-0{,}900} = s.$$

$$y = \frac{53{,}6 - \sqrt{2872{,}96 + 720}}{-0{,}9} = 7{,}27.$$

Nun aber ist die Ordinate des Punktes C = 6,0, daher fällt die Theilungslinie bei einem Abstand von 7,27 über C hinaus.

Es muss desshalb zuerst das Viereck B C K A berechnet werden, welches durch die Parallele C K zur Grundlinie A D abgeschnitten wird. Hiefür ist die Ordinate P K = C G = 6,0, also der Abschnitt

$$A P = \frac{6 \times 5{,}5}{30} = 1{,}1$$

und K C = P G = a' = 59,0, daher A B C K

$$= \tfrac{1}{2}\,(59{,}0 + 53{,}6)\ 6 = 337{,}8$$
$$Q' = \ \ 62{,}2$$
$$Q = 400{,}0.$$

Sofort hat man K C D E als neues Viereck zu betrachten, von welchem die Grösse Q' = 62,2 durch eine Parallele zur Grundlinie K C = a = 59,0 abzuschneiden ist. Nun aber ist C O = B H + B G = 1,7 + 4,3 = 6,0; O D = 23,5 — 6 = 17,5, somit die neuen Coefficienten m', n', s'

$$m' = m \quad = -\ 0{,}183$$

$$n' = \frac{6}{17{,}5} = +\ 0{,}342$$

$$+\ 0{,}159 = s'.$$

also $$y = \frac{59 - \sqrt{3481{,}0 - 19{,}87}}{0{,}159} = \frac{0{,}168}{0{,}159} = 1{,}0566.$$

$$z' = \sqrt{3481{,}0 - 19{,}87} = 58{,}83.$$

Probe: $\frac{1}{2}\,(59{,}0 + 58{,}83) \times 1{,}0566 = 62{,}24.$

Sofort $CD = \sqrt{(17{,}5)^2 + 6^2} = 18{,}5$; $AE = \sqrt{30^2 + (5{,}5)^2} = 30{,}5$; $QZ = 6 + 1{,}0566 = 7{,}0566$ und

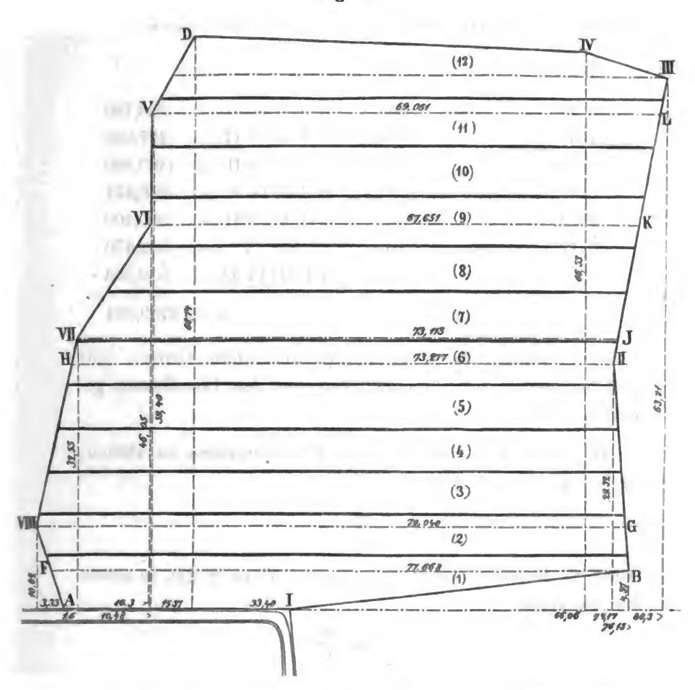
hieraus $$AY = \frac{7{,}0566 \times 30{,}5}{30{,}0} = 7{,}504;$$

$$CZ = \frac{1{,}0566 \times 18{,}5}{17{,}5} = 117.$$

Zweites Beispiel. Von dem Felde Figur 28 haben wir im §. 14, Seite 58 u. f., die Coordinaten berechnet; wir stellen sie hier zusammen:

Bezeichnung der Ecken.	Abscissen.	Ordinaten.
I	+ 33,40	+ 0,00
B	+ 76,16	— 4,58
II	+ 74,18	— 29,40
III	+ 79,30	— 63,69
IV	+ 66,25	— 66,53
D	+ 15,58	— 68,75
V	+ 10,48	— 59,40
VI	+ 1,10	— 46,05
VII	+ 1,60	— 32,55
VIII	— 3,33	— 10,02
A	+ 0,00	— 0,00

Fig. 28.



Dies Feld soll parallel zu A I in 12 gleiche Theile getheilt werden.

Aus jenen Coordinaten folgt der Inhalt des Ganzen zu 4769,354, daher die Grösse des einzelnen Looses = 397,447.

Vorbereitung. Durch jedes Eck VIII, VII, VI, V, III, II, ziehet man eine Parallele zu A L, berechnet deren Länge, sowie

den Inhalt der hievon gebildeten Paralleltrapeze, wie wir im vorigen Beispiel das Viereck A B C H berechnet haben.

Man findet so

B F	77,668	A J B F	=	253,790
VIII G	79,040	B F VIII G	=	427,030
VI H	73,277	VIII G II H	=	1469,860
VII J	73,115	II H VII J	=	236,471
VI K	67,651	VII J K VII	=	950,400
V L	69,050	VI K L V	=	912,470
		V L III IV D	=	519,343
			J =	4769,364

Dieser Inhalt differirt um die hier unmerkliche Grösse, 0,01 von demjenigen, welcher unmittelbar aus den Coordinaten gefunden wird.

Wir haben jetzt eine Reihe von Paralleltrapezen zu theilen; da hier p = q, so folgte

$$s = \frac{v + w}{p}$$

Allein da dasselbe m oder n für mehrere Vierecke gilt, so setzen wir wie vorhin

$$s = \frac{v}{p} + \frac{w}{q}$$

Somit

Erste Parcelle:

Grösse eines Looses	=	397,447
Viereck A I B F	=	253,790
Unterschied, oder noch abzuschneidendes Stück aus dem zweiten Viereck	=	143,657 = Q.

In diesem zweiten Viereck ist

$$m = -3{,}328 : 10{,}02 = -\ 0{,}3321$$
$$n = (76{,}15 - 74{,}17) : (29{,}32 - 4{,}57) = +\ 0{,}07967$$
$$s \ldots\ldots = -\ 0{,}25243$$
$$a = 77{,}668.$$

Daraus folgt (die Rechnung wie vorhin geführt)

$z = 78{,}734$; $y = 1{,}845$

Breite des ersten Vierecks = 4,57

Daher senkrechte Ackerbreite = 6,415
Breite des Kopfes linker Hand = 6,78
„ „ „ rechter „ = 1,86

Zweite Parcelle:

Summen von 2 Loosen . . . . = 794,894
Summe der zwei Vierecke A I B G VIII = 680,820

Unterschied oder jetziges Q . . . . . . = 114,074

Dies ist das erste aus dem dritten Viereck abzuschneidende Stück, dabei hat man a = VIII C . . = 79,040

$$m = (3{,}328 + 1{,}6) : (32{,}55 - 10{,}02) = +\ 0{,}2187$$
$$n \text{ wie vorhin} \ldots\ldots = +\ 0{,}07967$$
$$s = +\ 0{,}29837$$

Hieraus $z = 78{,}608$ . . . . $y = 1{,}448$
Restbreite des vorigen Viereckes = 3,605

Senkrechte Ackerbreite . . = 5,053
Breite des Kopfes linker Hand = 3,78 und 1,48
„ „ „ rechter „ = 5,08

Dritte Parzelle:

Voriges Q	=	114,074
1 Loos	=	397,447
Jetziges Q	=	511,521

a und s wie vorhin = 79,040 resp.	=	0,29837
Hieraus z = 77,085 . . . . . . y	=	6,553
Hievon ab das vorige y . . .	=	1,448
bleibt senkrechte Ackerbreite	=	5,105
Breite des Kopfes linker Hand	=	5,180
„ „ „ rechter „	=	5,120

Vierte Parcelle:

Voriges Q	=	511,521
1 Loos	=	397,447
Jetiges Q	=	908,968

Hieraus z = 75,530 . . . . y	=	11,762
Voriges y	=	6,553
Senkrechte Ackerbreite . . .	=	5,209
Breite des Kopfes linker Hand	=	5,271
„ „ „ rechter „	=	5,225

Fünfte Parcelle:

Voriges Q	=	908,968
1 Loos	=	397,447
Jetziges Q	=	1306,415

Hieraus z = 73,994 . . . y	=	17,094
Voriges y	=	11,762
Senkrechte Ackerbreite . .	=	5,332

Kopfbreite linker Hand . = 5,37
„ rechter „ . = 5,345

Sechste Parcelle:

6 Loose	= 2384,682
Die 4 Vierecke A B J VII	= 2387,151
Ueberschuss	= 2,469

Hier genügt es, mit der Constructionslinie J VII = 73,115 in diese 2,469 zu dividiren und der Quotient 0,0337 wird der Abstand der Theilungslinie seyn diesseits von J VII.

Restbreite des vorigen Vierecks	=	2,206
Breite des Vierecks II H VII J	=	3,23
		5,436
ab das obige	—	0,0337
Senkrechte Ackerbreite .	=	5,402
Kopfbreite linker Hand .	=	5,480
„ rechter „ .	=	3,04 und 2,28.

Siebente Parcelle:

$Q = 397,447 - 2,469$ . . . . $= 394,978$

im 5. Viereck ist $m = +\ 0,5851$

$n = -\ 0,1782$

$s = +\ 0,4069$

Man findet $z = 70,915$ . . $y = 5,500$

Hiezu die Vorigen . . . . . = 0,0337

Senkrechte Ackerbreite . . = 5,533

Kopfbreite linker Hand . = 5,590
„ rechter „ . = 5,540

Achte Parcelle:

Q = 394,978 + 397,447 . . . . = 792,425
z = 68,249 . . . . y = 11,204
Voriges y . . . . = 5,50

Senkrechte Ackerbreite . = 5,704
Kopfbreite linker Hand . = 5,780
„ rechter „ . = 5,725

Neunte Parcelle:

9 Loose . . . . , ... = 3577,023
Flächengrösse bis K VI . . . . = 3337,551

Unterschied oder Q im 6. Viereck . . = 239,472

a = 67,67 . . . . m = + 0,0734
n = − 0,1782

s = − 0,1048

z = 68,041 . . . . y = 3,309
Restbreite vom vorigen Viereck = 2,396

Senkrechte Ackerbreite . . . = 5,705
Kopfbreite linker Hand . = 1,987 und 4,322
„ rechter „ . = 5,716

Zehnte Parcelle:

Q = 239,472 + 397,447 . . . . = 636,919
z = 69,0149 . . . . y = 9,319
Vorhergehende Breite . . − 3,309

Senkrechte Ackerbreite . . = 6,010

Kopfbreite linker Hand . . . . = 6,013
" rechter " . . . . . = 6,035

Eilfte Parcelle:

11 Loose	=	4371,917
Flächengrösse bis L V	=	4250,021
Unterschied oder jetziges Q	=	121,896

a = 69,051 . . . . . m = + 0,5450
n = — 0,1782
s = + 0,3668

z = 68,082 . . . . y = 1,778
Vorhergehende Restbreite = 4,031

Senkrechte Ackerbreite . = 5,809

Kopfbreite linker Hand . = 3,045 und 2,78
" rechter " . = 2,427

Zwölfte Parcelle:

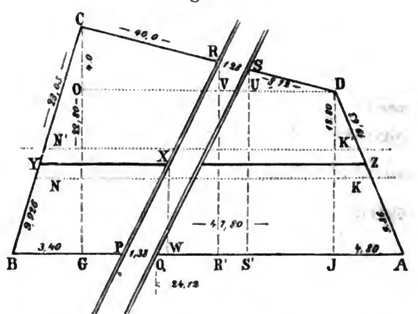
Grösse des letzten Viereckes	=	519,343
" " vorigen Q	=	121,896
Unterschied oder jetziges Q	=	397,447

Kopfbreite linker Hand . . = 6,143
" rechter " . = 2,107

Drittes Beispiel. Das Grundstück Fig. **24**, *welches von einem Weg durchschnitten wird, soll durch eine Parallele zu* A B *in zwei gleiche Theile getheilt werden, nämlich so, dass jeder Theil gleich viel nutzbares Land enthält.*

Vorbereitung. Die Zahlen der F gur geben die nötigen Maasse an. Auf der Grundlinie wurde von A gegen B gemessen, und

Fig. 29.



auf der Gegenseite von C nach D. Oben und unten sind die Durchschnittspunkte des Weges mit den Viereckseiten bemerkt. Vorerst nun müssen die Coordinaten der Durchschnittspunkte R und S bezüglich auf die Grundlinie A B berechnet werden, nämlich A R′ und R R′; A S′ und S S′.

Es ist S S′ = S U + U S′ und R R′ = R V + V R′; sofort den Winkel C D O = a setzend, und sin. a $= \frac{C\,O}{C\,D}$ etc.

$$S\,U = D\,S \text{ sin. a} = 8{,}72 \times \frac{4{,}0}{40{,}0} = 0{,}87$$

$$\text{also } S\,S' = 18{,}8 + 0{,}87 = 19{,}67,$$

$$R\,V = D\,R \text{ sin. a} = 10{,}0 \times \frac{4{,}0}{40{,}0} = 1{,}00$$

$$\text{also } R\,R' = 18{,}8 + 1{,}0 = 19{,}80$$

$$\text{ferner } J\,S' = D\,U = D\,S \text{ cos. a} = 8{,}72 \times \frac{39{,}6}{40{,}0} = 8{,}64$$

$$J\,R' = D\,U \mathrel{\dot{=}} D\,R \text{ cos. a} = 10{,}0 \times \frac{39{,}6}{40{,}0} = 9{,}90$$

Wegbreite P Q = 1,38; P R′ = J P — J R′ = 10,8;
Q S′ = J Q — J S′ = 10, 68.

Inhalt des ganzen Grundstückes

$\frac{1}{2}$ (47,8 — 4,8) 22,80 + $\frac{1}{2}$ (47,8 — 3,4) 18,80 = 907,56

Inhalt des Weges

= $\frac{1}{2}$ (1,38 + 10,68) 19,8 + $\frac{1}{2}$ (1,38 — 10,8) 19,67 = 26,75

Zu halbirende Fläche = 880,81

Q = 440,405

Berechnung der ersten Parcelle.

Y Z sei die Theilungslinie; sie schneidet die eine Seite des Weges in X einen Punkt, dessen Ordinate W X = y.

Setzt man die Grundlinie A B = a, die Wegbreite P Q = b, die Coeffizientensumme m + n wie vorhin = s dann ist die Theilungslinie

$$Y\,Z = a - s\,y$$

und die Fläche des Weges innerhalb der ersten Parcelle = b y.

Somit Inhalt des Viereckes A B Y Z oder

$$2\,(Q + b\,y) = (2\,a - s\,y)\,y$$

woraus $$y = \frac{a - b \mp \sqrt{(b - a)^2 - 2\,Q\,s}}{s} \quad . \quad . \quad . \quad (2,$$

da nun $m = \frac{4,8}{18,8} = 0,25$; $n = \frac{3,4}{22,8} = 0,15$, also $s = 0,40$

folgt $$y = \frac{46,42 - \sqrt{46,42^2 - 880,81 \times 0,4}}{0,4} = 9,91.$$

Probe. s y = 3,964; also doppelter Inhalt des Viereckes A B Y Z

= (2 × 47,8 — 3,964) 9,91 = 908,114

ab doppelter Inhalt des Weges

= 2 × 1,38 × 9,91 = 27,352

880,762 = 2 *Q*.

Viertes Beispiel. Es wird verlangt, man solle das Feld A B C D Fig. 29 durch einen Weg, welcher eine gegebene Breite hat, und mit A B parallel läuft dergestalt theilen, dass die Stücke beiderseits des Weges unter sich ein gegebenes Verhältniss haben, z. B. gleich sind.

Der Inhalt des Ganzen sey J, die Fläche des Weges $= W$, also die Grösse eines jeden Stückes $\frac{1}{2}(J - W)$.

N K sey der untere, N' K' der obere Wegrand, die Wegbreite sey b; die Ordinate von N sey y, und folglich die Ordinate von $N' = y + b$, dann ist $N K = a - s y$,

dann ist $$N' K' = a - s (y + b) \quad . \quad . \quad [§. 19. (2)]$$

Daher ist die doppelte Fläche des Weges

$$2 W = (2 a - 2 s y - s b) b.$$

Die doppelte Fläche der ersten Parcelle A N

$$J - W = (2 a - s y) y$$

hieraus $$a b - s b y - \frac{1}{2} s b^2 + 2 a y - s y^2 = J,$$

oder $$s y^2 + y (s b - 2 a) = a b - \frac{1}{2} s b^2 - J,$$

aus welcher Gleichung der Wert von y hervorgeht. Ein Zahlenbeispiel auf den vorliegenden Fall anzuwenden, bleibe dem lernbegierigen Leser überlassen.

Vergleichung der Formeln dieses und des vorhergehenden §.

Die Parallele zur Richtung der Ordinaten, welche durch den Ursprung oder Anfangspunkt geht, heisst bekanntlich die *Ordinatenaxe*, §. 8. Bei Parallel-Coordinaten lassen sich Abscissen und Ordinaten ohne weitere Rechnung mit einander verwechseln; ist 4 die Abscisse und 6 die Ordinate eines Punktes, und man nimmt die Ordinatenaxe zur Abscissenaxe, so ist 6 die neue Abscisse und 4 die neue Ordinate des gegebenen Punktes. In

unsern Formeln für die Umwandlung der Coordinaten wird, wenn φ einen rechten Winkel bedeutet, auch

einfach $$x' = y \text{ und } y' = x.$$

In den Formeln des §. 14 sind die Coeffizienten k und i wie wir gesehen haben nichts weiter als die *Tangenten* der Neigungswinkel, welche diejenigen Vierecksseiten mit der Axe bilden, worauf die Theilungslinien stossen.

In den Formeln des vorstehenden §. aber sind die Coeffizienten m und n die Cotangenten der entsprechenden Neigungsseiten. Benennt man von A über B herum die Neigungswinkel mit α' α'' α''' α'''', so ist (§. 16) tang. $\alpha''' = k$; tang. $\alpha' = i$ und im §. 19 cot. $\alpha'''' = n$; cot. $\alpha'' = m$. Verwechselt man aber in beiden §§. die Richtung in den Ordinaten mit jener der Abscissen und lässt A als Anfangspunkt, so wird z mit y umgewechselt, ferner α' und α''' mit α'' und α''''; daher

$$k = \text{tang. } \alpha''' = \text{cot. } \alpha'''' = m, \text{ und}$$
$$i = \text{tang. } \alpha' = \text{cot. } \alpha'' = n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad *)$$

In der Gleichung (4) §. 16 ist $i = n = 0$ geworden und hier ist auch die günstigste, d. h. die für die Rechnung einfachste Lage des Vierecks gegen die Coordinaten-Axen unterstellt, weil zwei Seiten in die Richtung dieser Axen fallen. Die übrige Verschiedenheit in den Formeln beider §§. rührt lediglich von der verschiedenen Lage des Vierecks gegen die Coordinatenaxen her, weil jedesmal andere beständige Grössen m, n, i, k nötig sind, um die Lage der Theilungslinie durch ihre Coordinaten algebraisch auszudrücken.

---

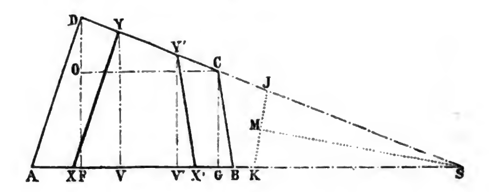
*) In Betreff der Vorzeichen von tang. α und cot. α vergleiche die Anmerkung zu §. 16 Seite 74.

§. 20.

Dritte Aufgabe. *Ein Viereck ist gegeben durch Coordinaten, welche sich auf die Grundlinie beziehen. Dasselbe soll getheilt werden durch Linien, welche einer Nebenseite parallel sind.*

Angaben: A B C D, Fig. 30, sey das Viereck, A B seine Grundlinie. Die Theilungslinie X Y, oder X' Y', soll zu A B, oder B C parallel gelegt werden.

Fig. 30.



Lösung. In dem vorliegenden Falle wird man am besten thun, die Gegenseite A B, D C bis zu ihrem Durchschnitt S zu verlängern, wobei man hat

$$F\,S = D\,F\,\frac{C\,O}{D\,O}$$

Sollen nun die Theilungslinien mit A D parallel laufen, und A X Y D das abzuschneidende Stück sein, so setze man das grosse Dreieck A S D $= J$ und X S Y $= Q$. Dann ist

$$x = \frac{\sqrt{a^2\,Q}}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei x irgend eine Seite, einen Perpendikel oder einen Abschnitt des kleineren Dreieckes bezeichnet und a die entsprechende Linie des grossen Dreieckes.

Sollen aber die Theilungslinien Y' X' mit C B parallel seyn, dann bezeichnet *J* das Ergänzungs-Dreieck B S C und *Q* das Dreieck X' S Y'. Alles Uebrige würde bleiben.

Beispiel. Das Grundstück in Fig. 31 sollte in Loose von

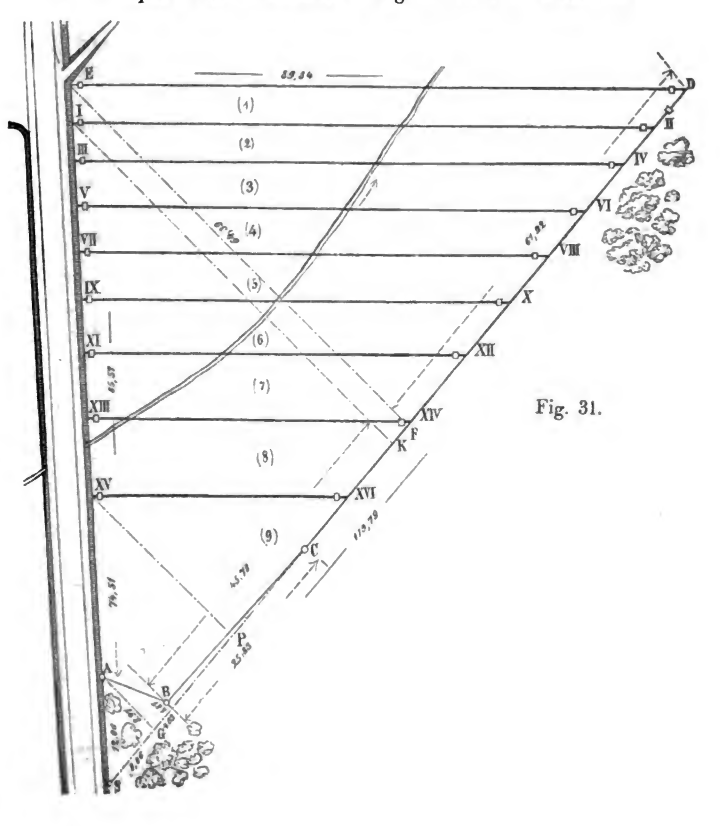


Fig. 31.

1 Morgen getheilt werden und man hat es für zweckmässig erachtet, die Theilungslinie der Seite D E parallel zu legen. Zu dem Ende ward die Figur zum Dreieck D E S verlängert. Die Länge des Perpendikels E F, welcher mit der Kreuzscheibe abgesteckt worden, konnte jedenfalls als richtig angenommen werden; der Abschnitt F D wurde aus E F und E D dadurch berichtigt, dass man das Ergebniss der Messung mit dem Werte $DF = \sqrt{(DE^2 - EF^2)}$ verglich, und um den gefundenen Unterschied die Länge von D F verbesserte. Eine solche Berichtigung wird für so zuverlässiger anzusehen seyn, je kleiner E F ist im Vergleich mit E D, denn in einem rechtwinklichen Dreiecke mit ziemlich spitzem Winkel kann eine kleine Aenderung, oder ein kleiner Fehler in der Länge der Hypothenuse oder des kleineren Catheten nur unmerklichen Einfluss haben auf die Länge des grösseren Catheten.

Aus der Vergleichung der Perpendikel E F und A G, sowie der Seiten E S und A S gab sich A S = 12,06 und G S = 8,06, also E S = 86,57; D S = 119,79 Ruthen.

Inhalt des Dreieckes

aus den drei Seiten *)

s =	147,85	log. s =	2,1698213
s — a =	28,06	log. (s — a) =	1,4480877
s — b =	58,51	log. (s — b) =	1,7072301
s — c =	61,28	log. (s — c) =	1,7873188
		log d. Wurzelgr. =	7,1724597

*) Nach der bekannten Formel $J = \sqrt{s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)}$, worin s die halbe Summe der drei Seiten a, b, c des Dreieckes ausdrückt.

$$\log. J = 3{,}5862289$$
$$J = 3856{,}82$$

Hievon ab die Fläche S C B A = 82,16

Zu vertheilende Fläche = 3774,66 = 9 Morgen 174,16 Ruthen.

aus Grundlinie und Höhe

$$\log.\ 119{,}79 = 2{,}0784206$$
$$\log.\ 64{,}39 = 1{,}8088184$$
$$\log.\ 2\,J = 3{,}8872390$$
$$= 3856{,}64$$

Die beiden Angaben des Inhaltes sind gleich zu erachten, da jedoch die Berechnung der Parcellen mittelst der Seiten des Dreieckes geschehen muss, so hat man den Inhalt, welcher sich aus den Seiten ergab, als richtig beibehalten damit die Rechnung stimme.

Die Grösse Q in unserer obigen Formel (1) ist somit, für die abzuschneidenden Parcellen, der Reihe nach 3856,80 weniger 1, 2, 3, ... mal 400 Ruthen.

Erste Parcelle. $Q = 3456{,}80$; die Seiten S D und S E sollen = d und e gesetzt werden.

$$\log.\ Q = 3{,}5386745$$
$$\log.\ J = 3{,}5862289$$
$$\text{best. log.} = 9{,}9524454$$
$$\log.\ e^2 = 3{,}8747348$$
$$\log.\ \overline{SI}^2 = 3{,}8271802$$
$$\log.\ S\,I = 1{,}9135901$$
$$S\,I = 81{,}957$$
$$S\,E = 86{,}570$$
$$E\,I = 4{,}613$$

$$\text{best. log.} = 9{,}9524454$$
$$\log.\ d^2 = 4{,}1568412$$
$$\log.\ \overline{SII}^2 = 4{,}1092866$$
$$\log.\ S\,II = 2{,}0546433$$

$$S\,H = 110{,}408$$
$$D\,H = 6{,}382$$
$$119{,}790$$

Proberechnung. Hiezu berechnen wir die Coordinaten des Viereckes E I II D und daraus dessen Inhalt

Für I K;		Für S K;	
best. log. =	9,9524454	best. log. =	9,9524454
log. $\overline{EF}^2$ =	3,6176368	log. $\overline{SF}^2$ =	3,5249070
log. $\overline{IK}^2$ =	3,5700822	log. $\overline{SK}^2$ =	3,4773524
log. I K =	1,7850411	log. K =	1,7386762
I K =	60,96 = p	S K =	54,786
E F =	64,39 = q	ab von S II =	113,403
II D =	6,382 = a	II K =	58,622 = v
			61,92 = w

(a — w) n = — 6,382 × 61,92 = — 3385,597
(a — v) q = + 65,004 × 64,39 = + 4185,607

2 *J* = 800,010
J = 400,005

Zweite Parcelle. $Q = 3056{,}80$

log. Q =	3,4852670	best. log. =	9,8990381
log. J =	3,5862289	log. d^2 =	4,1568412
best. log. =	9,8990381	log. $\overline{SIV}^2$ =	4,0558793
log. e^2 =	3,8747348	log. S IV =	2,0279397
log. $\overline{SIII}^2$ =	3,7737729	S IV =	106,645
log. S III =	1,8868865	ab von S II =	113,408
S III =	77,070	II IV =	6,763
ab von S I =	81,957		
I III =	4,887		

Proberechnung. Diese kann jetzt einfacher gehalten werden, denn weil die abzuschneidenden Dreiecke ähnlich sind, ihre Seiten also proportional, so müssen die Differenzen der Logarithmen dieser Seiten beständig seyn.

Für das Dreieck S D E stehet

log. S D = 2,0784206
log. S E = 1,9373674

Diff. = 0,1410532

Für das Dreieck S I II folgt

log. S II = 2,0546433
log. S I = 1,9135901

best. Diff. = 0,1410532

Für das Dreieck S IV III

log. S IV = 2,0279397
log. S III = 1,8868865

best. Diff. = 0,1410532

Dritte Parcelle. $Q = 2656,80$.

log. Q = 3,4243589
log. J = 3,5862289

best. log. = 9,8381300
log. e² = 1,8747348

log. $\overline{SV}^2$ = 3,7128648
log. S V = 1,8564324
S V = 71,851
ab von S III = 77,070

III V = 5,219

best. log. = 9,8381300
log. d² = 4,1568412

log. $\overline{SVI}^2$ = 3,9949712
log. S VI = 1,9974856
S VI = 99,423
ab von S IV = 106,645

IV VI = 7,222

Probe. log. S VI = 1,9974856
log. S V = 1,8564324

best. Diff. = 0,1410532

Vierte Parcelle. $Q = 2256,80$.

log. Q = 3,3534931
log. J = 3,5862289

best. log. = 9,7672642
log. e² = 1,8747348

log. $\overline{SVII}^2$ = 3,6419990

best. log. = 9,7672642
log. d² = 4,1568412

log. $\overline{SVIII}^2$ = 3,9241054
log. S VIII = 1,9620527

Uebertrag 3,6419990
log. S VII = 1,8209995
S VII = 66,221
a', von S V = 71,851

V VII = 5,630

S VIII = 91,633
ab von S VI = 99,423

VI VIII = 7,790

Probe. log. S VIII = 1,9620527
log. S VII = 1,8209995

best. Diff. = 0,1410532

Fünfte Parcelle. Q = 1856,80

log. Q = 3,2687651
log. J = 3,5862289

best. log. = 9,6825362
log. e^2 = 3,8747348

log. $\overline{S\,IX}^2$ = 3,5572710
log. S IX = 1,7786355
S IX = 60,067
ab von S VII = 66,221

VII IX = 6,154

best. log. = 9,6825362
log. d^2 = 4,1568412

log. $\overline{S\,X}^2$ = 3,8393774
log. S X = 1,9196887

S X = 83,117
ab von S VII = 8,516

Probe. log. S X = 1,9196887
log. S IX = 1,7786355

best. Diff. = 0,1410532

Sechste Parcelle. Q = 1456,80

log. Q = 3,1633999
log. J = 3,586228

best. log. = 9,5771710
log. Q = 3,8747348

log. $\overline{S\,XI}^2$ = 3,4519058
log. S XI = 1,7259529
S XI = 53,205
ab von S IX = 60,067

IX XI = 6,862

best. log. = 9,5771710
log. d^2 = 4,1568412

log. $\overline{S\,XII}^2$ = 3,7340122
log. S XII = 1,8670061
S XII = 73,622
ab von S X = 83,117

9,495

Probe. log. S XII = 1,8670061
log. S IX = 1,7259529

best. Diff. = 8,1410532

Siebente Parcelle. Q = 1056,80.

log. Q = 3,0239928
log. J = 3,5862289

best. log. = 9,4377639
log. e^2 = 3,8747348

log. $\overline{S\,XIII}^2$ = 3,3124987
log. S XIII = 1,6562493
S XIII = 45,316
ab von XI = 53,205

7,889

best. log. = 9,4377639
log. d^2 = 4,1568412

log. $\overline{S\,XIV}^2$ = 3,5946051
S XIV = 1,7973025

S. XIV = 63,705
ab von S XII = 73,622

S XII XIV = 10,917

Probe. log. S XIV = 1,7973025
log. S XIII = 1,6562492

best. Diff. = 0,1410532

Achte Parcelle. Q = 656,80.

log. Q = 2,8174331
log. J = 3,5862289

best. log. = 9,2312042
log. e^2 = 3,8747348

log. $\overline{S\,XV}^2$ = 3,1059390
log. S XV = 1,5529695
S XV = 35,725
ab von S XIII = 45,316

XIII XV = 9,591

best. log. = 9,2312042
log. d^2 = 4,1568412

log. $\overline{S\,XVI}^2$ = 33880454
log. S XVI = 1,6940227
S XVI = 49,434
ab von S XIV = 62,705

XIV XVI = 13,271

Probe. log. S XVI = 1,6940227
log. S XV = 1,5529695

best. Diff. = 0,1410532

Neunte Parcelle. Q = 574,66.

Für diese bleibt nur eine Proberechnung zu machen;

von vorhin	best. log.	= 9,2312042
aus der Proberechnung für die Parcelle (1)	log. $\overline{EE}^2$	= 3,6176368
	log. $\overline{XVP}^2$	= 2,8488410

log. XV P = 1,4244205
log. S XVI = 1,6940227

log. 2 × S XV XVI = 3,1184432 = log. 1313,54
S XV XVI = 656,77
ab S C B A = 82,16

Neunte Parcelle = 574,61 wie oben

Die Differenz von 0,05 kommt hiebei nicht mehr in Betracht.

Bemerkung I. Die Rechnungsprobe bei der zweiten und achten Parcelle bezog sich nur auf die letzten Logarithmen, und man muss desshalb beim Aufschlagen der Zahlen hiezu vorsichtig seyn. Ob sich hier noch ein Fehler eingeschlichen, ist leicht wahrzunehmen, wenn man die gefundenen Breiten der Parcellen mit einander vergleicht, weil diese von 1 bis 8 eine stetige Reihe bilden müssen.

Bemerkung II. Der Theilungspunkt XVI liegt noch jenseits von C; es hätte sich aber ergeben können, dass er zwischen C und B gefallen wäre. In diesem Falle hätte man durch C eine Parallele zu D E legen, die Seiten C B, X V A zu ihrem Durchschnitt verlängern, und so ein neues Dreieck bilden müssen, mittelst dessen die Theilung zu Ende geführt worden wäre.

§. 21.

Aufgabe. *Von einem Viereck, dessen Coordinaten sich auf die Grundlinie als Abscissenaxe beziehen, soll ein Stück von gegebener Grösse abgeschnitten werden durch eine gerade Linie, welche der Gegenseite parallel ist.*

Fig. 32.

Vorbereitung. Fig. 32. A B sey die Grundlinie, Y Z' die Theillinie, welche mit der Gegenseite D C parallel läuft, α, β die Ordinaten ihrer Endpunkte, und γ, δ die zugehörigen Abschnitte der Grundlinie; die übrigen Bezeichnungen wie bisher.

Nehmen wir einen Augenblick den Punkt Y als bekannt an und suchen β, γ, δ durch das Gegebene und die Ordinate α auszudrücken; dazu aber liegt vor:

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \frac{v\,\alpha}{p} = m\,\alpha \\ \delta &= \frac{w\,\beta}{q} = n\,\beta\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$O'\,Z' = \beta - \alpha = u$; $O'\,Y = a - \gamma - \delta = \alpha - m\,a - n\,\beta$.

$$\text{Ferner } \frac{O'\,Z'}{O'\,Y} = \frac{d}{t} = k.$$

$$\text{oder } \frac{u}{a - m\,\alpha - n\,\beta} = k.$$

Hieraus fliessen für die Ordinate β des Punktes Z' die zwei Werthe

$$u = a k - \alpha m k - \beta n k = \beta - \alpha$$

also durch Elimination,

$$\beta = \frac{a k - \alpha m k + \alpha}{1 + n k}$$

$$\text{somit auch } \delta = \frac{a n k - a m n k + \alpha n}{1 + n k}$$

$$\gamma = m \alpha.$$

Für den Flächeninhalt des abzuschneidenden Stückes aber hat man die Bedingungsgleichung:

$$a \alpha + a \beta - \alpha \delta - \beta \gamma = 2 Q.$$

Für β, γ und δ die vorigen Werte eingeführt und gehörig reducirt, kommt:

$$\alpha^2 (m k - 1) (m + n) - 2 \alpha a (m k - 1) = 2 Q (n k + 1) - a^2 k.$$

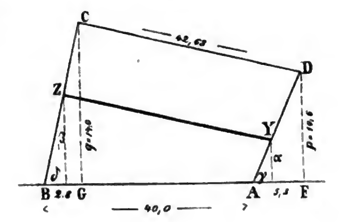
$$\alpha^2 - \frac{2 \alpha a}{s} = \frac{2 Q (n k + 1) - a^2 k}{s (m k - 1)}$$

indem man wieder $m + n = s$ setzt.

$$\text{Endlich } \alpha = \frac{a}{s} - \sqrt{\frac{2 Q (n k + 1) - a^2 k}{s (m k - 1)} + \frac{a^2}{s^2}}$$

Beispiel. Es sey Fig. 33 A B = 40; A F = 5,3; D F = 10,6, B G = 2,8, CG = 14,0. Daher Inhalt (bei dessen Berechnung A F negativ auftritt) J = 514,26 □Ruthen. Der Eigenthümer verkauft ein Stück an A B stossend von 200 Ruthen und verlangt, dass sein Ueberrest gleich breit sey, also die Theilungslinie Y Z, parallel zu D C bleiben soll.

Fig. 33.



$$m = \frac{-5,3}{10,6} = -0,50$$

$$n = \frac{2,8}{14,0} = +0,20$$

$$s = -0,30$$

$$d = 14,0 - 10,6 = 3,4$$
$$t = 40,0 + 5,3 - 2,8 = 42,5$$

$$k = \frac{3,4}{42,5} = 0,08.$$

$$\text{Somit } \alpha = -\frac{40}{0,3} + \sqrt{\frac{400 \cdot 1,016 - 128,0}{0,312} + \frac{1600}{0,09}}$$

$$\alpha = -133,333 + \sqrt{892,307 + 17777,77} = 3,306.$$

$$\beta = \frac{3,2 - 0,1322 + 3,306}{1,106} = 6,533.$$

$$\gamma = m\,\alpha = -0,5 \cdot 3,306 = -1,653.$$
$$\delta = n\,\beta = 0,2 \cdot 6,293 = +1,3066.$$

Probe: $\frac{40 \times (3,306 + 6,533) + 10,681 - 4,319}{2} = 199,96 = Q.$

Aus den Coordinaten folgt die Seitenlänge A D = 11,851; B C = 14,277; C D = 42,631.

Die Theilungslinie Y Z = 40,474.

$$\text{Hieraus } A\,Y = \frac{3{,}306 \times 11{,}851}{10{,}6} = 3{,}696.$$

$$B\,Z = \frac{6{,}533 \times 14{,}277}{14{,}0} = 6{,}662.$$

Man könnte fragen: Wie breit ist das Stück Y Z C D geblieben? Die Antwort wird nicht besser gegeben werden können, als wenn man die Ordinaten der Punkte C D bezüglich auf die Theilungslinie Y Z berechnet.

Für F als Anfangspunkt, sind gegeben die Coordinaten:

$$\text{des Punktes D} \left\{ \begin{array}{l} x = 0{,}0 \\ y = 10{,}6 \end{array} \right.$$

$$\text{des Punktes C} \left\{ \begin{array}{l} x = 42{,}5 \\ y = 14{,}0 \end{array} \right.$$

Die neue Axe macht mit der ersten einen Winkel, dessen Tangenten die Grösse $k = 0{,}08$; diese Tangente gehört zu $5^g{,}08 = \varphi$.

Weil der Anfangspunkt nach Y verlegt werden soll, einen Punkt, dessen Coordinaten a und b heissen sollen, nämlich:

$$a = 5{,}3 - 1{,}653 = 3{,}647$$
$$b = \alpha \,\ldots\ldots\ldots = 3{,}306.$$

so wollen wir in der Formel des §. 11 anstatt x und y setzen $x - a$, $y - b$,

$$\text{daher für den Punkt D} \left\{ \begin{array}{l} x \;\ldots\ldots\ldots = -\,3{,}647 \\ y = 10{,}6 - 3{,}306 = 7{,}294 \end{array} \right.$$

$$\text{für den Punkt C} \left\{ \begin{array}{l} x = 42{,}5 - 3{,}647 = 38{,}853 \\ y = 14{,}0 - 3{,}306 = 10{,}694 \end{array} \right.$$

$$\sin.\ 5^g{,}08 = 0{,}0797;\ \cos.\ 5^g{,}08 = 0{,}9968.$$

sofort für D: $y' = 7,294 \times 0,9968 + 3,647 \times 0,0797 = 7,561$,
für C: $y' = 10,694 \times 0,9968 - 38,853 \times 0,0797 = 7,563$.

Diesen Abstand wieder mit der halben Summe der zwei Parallelen C D, Y Z multiplicirt, gibt den Inhalt des oberen Viereckes.

$$\begin{aligned} ½\ 83,108 \times 7,561 &= 314,23 \\ Q &= 200 \\ \hline J &= 514,23, \end{aligned}$$

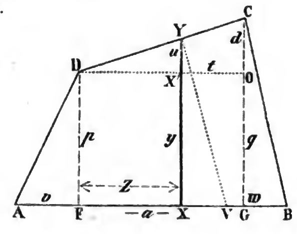
was gegebenen gleich zu setzen ist.

§. 22.

Aufgabe. *Ein Viereck soll getheilt werden durch eine gerade Linie, welche einer beliebigen Richtung parallel ist.*

Die Forderung der Aufgabe: „einer gegebenen Richtung parallel seyn", kann auch so ausgedrückt werden: „die Theilungslinie soll mit der Grundlinie des Viereckes einen gegebenen Winkel bilden, welcher λ heissen mag.

Fig. 34.



Angenommen, Y V, Fig. 34 sey die Theilungslinie, also Y V A ein Winkel $= \lambda$, und Q bedeute das Viereck D Y V F

d. h. den abzuschneidenden Theil, vermindert um das Dreieck A D F.

Indem ich sofort den Punkt V als bekannt voraussetze, handelt es sich, die Ordinate X Y = y des Durchschnittspunktes Y zu bestimmen. Nun hat man wieder

$$y = p + u = p + z\,k.$$

Aber $X\,V = x = y \cdot \cot. \lambda = y\,i = p\,i + z\,k\,i$ ($\cot. \lambda$ mit i bezeichnend).

Nun steht die Bedingungsgleichung

$$(z + x)\,(p + y) - p\,x = 2\,Q \;.\;.\;.\;.\;. \quad (\S.\ 16)$$

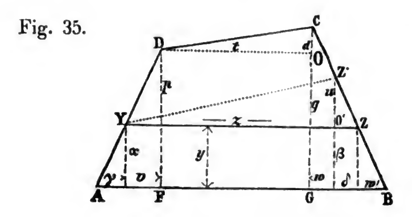
Hierin für x und y die obigen Werte substituirt, ergibt sich

$$z^2\,(k + k^2\,i) + 2\,z\,(p + p^2\,i) = 2\,Q - p^2\,i,$$ und

nach den Bezeichnungen von Seite 75

$$z^2 = \frac{-\,L \pm \sqrt{L + 2\,QK - WK}}{K}$$

Fig. 35.



Bemerkung I. Es wäre möglich, dass die Theilungslinie nicht die Grundlinie und deren Gegenseite schnitte, sondern die beiden der Grundlinie anliegenden Seiten. Y Z', Fig. 35, sey die gesuchte Linie. Denkt man hier sich Y als gegeben, dann ist die Richtung der Linie mittelst des Winkels Z' Y O' = λ ausge-

drückt, wie im vorigen Paragraphen mittelst des Winkels C D O, und man findet die Ordinate des Durchschnittspunktes Z' ganz auf demselben Wege, wie dort.

Endlich könnte die Theilungslinie die Grundlinie und eine anliegende Seite schneiden, und dann hätte man ein Dreieck zu berechnen, von welchem die Winkel und der Inhalt gegeben sind.

In allen Fällen lässt sich die Aufgabe auf §. 19 zurückführen, wenn man die Coordinaten umrechnet und dabei eine Parallele zu der gegebenen Richtung als neue Abscissenaxe nimmt.

Bemerkung II. Die Geometer bedienen sich zur Ausführung einer Paralleltheilung häufig einer Annäherungsmethode, welche wir in §. 4 bereits angewendet, und welche hier nochmals unter allgemeinerem Gesichtspunkte aufgefasst werden soll. Es sey Fig. 35 mittelst einer Parallelen Y Z zur Seite A B ein Stück von bestimmter Grösse Q abzuschneiden. Nachdem die Figur in einem grossen Maassstabe, etwa $^1/_{1000}$ aufgetragen, dividirt man mit der Länge von A B = a in Q und findet einen Quotienten, welcher als erster angenäherter Wert von y betrachtet wird. In einer Entfernung gleich diesem y zieht man die provisorische Theilungslinie Y Z = z'. Man misst die Grösse von z', nimmt das Mittel aus a + z' und dividirt zum zweiten Male in Q. Der Quotient ist ein zweitmals verbessertes y, welches in den meisten Fällen als das richtige wird betrachtet werden dürfen. Nötigenfalles jedoch zieht man in der Entfernung des zweiten y die zweite verbesserte Theilungslinie z'', vollführt mit $^1/_2$ (a + z'') eine dritte Division in Q, und findet nun das als richtig anzunehmende y.

Man sieht, dass der Zeitgewinn dieser Methode im Vergleich zur strengen Auflösungsart nicht gross seyn kann. Indessen bleibt dieselbe in den Fällen immerhin gut anzuwenden, wenn die

Gränzen bei A D und B C nicht scharf bestimmt sind, wenn diese z. B. durch Raine, Schluchten, geschlängelte Bäche u. dgl. gebildet werden.

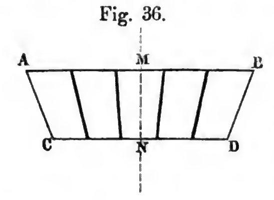
§. 23.

Symmetrische Theilung.

Obwohl aus der Anordnung paralleler Theilungslinien häufig eine regelmässige Gestalt der Theilstücke hervorgeht, treten doch gar manche Fälle ein, wo man von solcher Zerlegungsart abgehen und den Stücken ungleiche Endbreiten geben muss. Dadurch wird die Aufgabe wieder unbestimmt, allein sie gewinnt alsbald einen undeutbaren Ausdruck, wenn man hinzufügt, dass jene Breiten und die Flächenräume proportional seyn sollen.

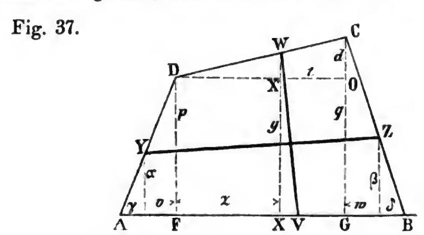
In Fig. 36 sey M A = M B und N C = N D, zugleich stehe M N senkrecht auf den Parallelen B A, D C, dann bildet die Figur ein *symmetrisches* Paralleltrapez, und M N ist die *Symmetrieaxe*. Wird das Ganze durch Theilung der Parallelseiten in gleiche Theile zerlegt, dann bilden die Theilungslinien auch wieder eine symmetrische Figur, und oben wie unten stehen die Breiten der Köpfe, wie die Flächenräume der Theilstücke mit den Seiten D C, A B in Proportion. Dies Doppelverhältniss kann noch fortbestehen, wenn auch die Stücke, sowie ihre Endbreiten, nicht mehr gleich sind; allein die Symmetrie, im strengen Sinne des Wortes, ist nicht mehr vorhanden; es müssten denn die Ungleichheiten der Theilung sich links und rechts von M N symmetrisch wiederholen.

Fig. 36.



In diesem strengen Sinne kann von symmetrischer Theilung eines unregelmässigen Viereckes niemals die Rede seyn; allein nichts hindert, dass man in gegenwärtigem Falle den Begriff von Symmetrie erweitere und diejenige Theilungsart eines Viereckes *symmetrisch* nenne, wobei die Endbreiten der Parcellen sich verhalten wie die Viereckseiten, von welchen sie Theile sind. Die Fig. 37 z. B. wird in diesem Sinne durch die Linie Y Z symmetrisch getheilt, wenn sich verhält A Y : A D = B Z : B C.

Fig. 37.



Von dem Viereck lässt sich dieselbe Vorstellung auf andere Figuren übertragen.

Nach dieser Bedingung nun eine Gleichung für die Theilungslinie Y Z, Figur 37, zu erhalten, setzen wir das Verhältniss $\frac{AY}{AD} = \frac{BZ}{BC} = \omega$, die Ordinaten und Abschnitte des ganzen Viereckes wieder p, q und v, w; dann sind die gleichnamigen Ordinaten und Abschnitte der Theilungslinie $\alpha = \omega\, p$; $\beta = \omega\, q$; $\gamma = \omega\, v$; $\delta = \omega\, w$; weil alle diese Linien mit den ersten im gleichen Verhältniss ω stehen müssen; daher hat man also-fort die Bedingungsgleichung

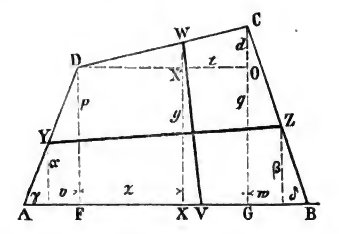
$$(a - \omega\, w)\, \omega\, p + (a - \omega\, v)\, \omega\, q = 2\, Q.$$

woraus $\omega^2\, (p\, w + q\, v) - \omega\, a\, (p + q) = -\, 2\, Q. \quad \ldots . (1)$

und, die Coefficienten von ω^2 und ω wieder mit K und L bezeichnend.

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} L - \sqrt{\frac{1}{4} L^2 - 2 Q K}}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Fig. 38.



II. Würde gefordert, dass die Theilungslinien auf die Grundlinie stossen sollen, dann setzen wir diese = a, Fig. 38, D C = c, die Breiten A V = a', D W = c'.

Da nun wieder das constante Verhältniss stattfinden soll, $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \omega$, folgt $a' = \omega\, a$, $c' = \omega\, c$.

Wie früher sey D O = t, C O = d, dann muss auch seyn D X' = F X = ω t; X' W = ω d.

Hieraus

$$X W = y = p + \omega\, d$$
$$X V = x = a' - (v + \omega\, t).$$

Aus diesen Bestimmungsstücken fliesst wieder eine Gleichung für den Inhalt Q des abzuschneidenden Stückes

$$A V (D F + W X) - D F \cdot X V - W X \cdot A F = 2 Q,$$

oder

$$\omega\, a\, (2\, p + \omega\, d) - p\, (\omega\, a - \omega\, t - v) - (p + \omega\, d)\, v = 2 Q \quad (3)$$

also $$\omega^2\, a\, d + \omega\, ([a + t]\, p - d\, v) = 2\, Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder $$\omega^2\, K + \omega\, L = 2\, Q.$$

woraus $$\omega = \frac{-\frac{1}{2} L + \sqrt{\frac{1}{4} L^2 + 2\, Q\, K}}{K} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

In diesem letzten Ausdrucke ist angenommen, dass die Ordinaten gegen C hin wachsen; wäre es nicht der Fall, so müsste vorhin in (3) $y = p - \omega d$, anstatt $p + \omega d$ gesetzt werden, oder man müsste die Theilung von B C aus beginnen.

Erster Zusatz. Setzt man in (1) und (4) $\omega = 1$, so wird, A Y = A D . . . . etc., A V = A B . . . . etc., d. i. Q wird gleich J, und in beiden Formeln wird $K + L = 2J$. Es ist daher

$$(a + t)p - ad - dv = 2J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wieder ein Ausdruck für den doppelten Inhalt eines Viereckes.

Zweiter Zusatz. Sind in einem Vierecke mehrere Stücke abzutheilen, so bezeichne man mit Q zuerst die Grösse *eines* Stückes, dann die Summen von *zweien*, von *dreien* u. s. f., K und L aber bleiben in einem und demselben Viereck ungeändert.

Der Kürze wegen werden wir sagen, bei symmetrischer Theilung sollen die Theilungslinien Y Z . . . ., den A B, D C *gemäss* liegen, oder wie V W . . . . den A D, B C *gemäss;* denn diese Grenzlinien gehören auch zu der stetigen Reihe der Theilungslinien; ja, man könnte nach demselben Gesetz, wie die Parcellen im Viereke folgen, noch auswärts liegende hinzufügen.*)

§. 24.

Beispiele.

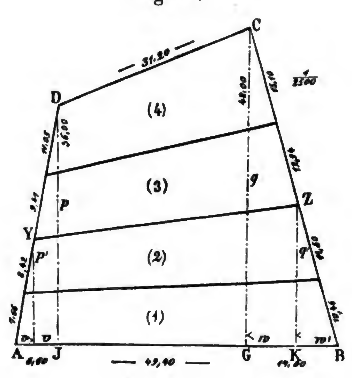
Das Viereck, Fig. 39, von welchem die Coordinaten sich auf die Grundlinie A B beziehen, war in vier gleiche Theile zu

*) Alle solche Theilungslinien gehörig verlängert, würden Tangenten werden an eine Parabel.

zerlegen und die Theilungslinien sollten symmetrisch dieser Axe gemäss liegen. Die Berechnung hat desshalb nach der Formel (2) des vorigen geschehen müssen. Nun war:

$$a = 49{,}40;\ p = 36{,}0;\ v = 6{,}6;\ q = 48{,}0;\ w = 14{,}0.$$

Fig. 39.



Inhalt:

$$a\,(p + q) = 49{,}4 \times (36 + 48) = 4149{,}6 = L$$

$$p\,w = 36 \times 14 = 504$$

$$q\,v = 48 \times 6{,}6 = 316{,}8$$

$$K = 820{,}8$$

$$4149{,}6 = L$$
$$820{,}8 = K$$
$$2)\ 3328{,}8 = 2\,J$$
$$1664{,}4 = J$$

also Grösse der abzutheilenden Stücke $\frac{1}{4}\ 1664{,}4 = 416{,}1$.

Vorbereitung zur Theilung.

$\frac{1}{2}\,L = 2074{,}8$	$\frac{1}{4}\,L^2 = 4304795{,}04$
$K = 820{,}8$	$\log.\ K = 2{,}9142373$
$A\,D = d = 36{,}6$	$\log.\ d = 1{,}5634811$
$B\,C = c = 50{,}0$	$\log.\ c = 1{,}6989700$

Die Breiten auf A D, welche dem jedesmaligen Q entsprechen, sollen d′, d″, d‴ . . . heissen; die gleichnamigen Breiten auf B C seyen c′, c″, c‴ etc.

Erste Parcelle: $Q = 416{,}1$; Q 832,2.

$$\log. 2\,Q = 2{,}9202277 \qquad {}^1/_4\, L^2 = 4304795{,}04$$
$$\log. K = 2{,}9142373 \qquad 2\,Q\,K = 683069{,}76$$
$$\log. 2\,Q\,K = 5{,}8344650 \qquad 3621725{,}28$$

$$ {}^1/_2 \log. 3621725{,}28 = 3{,}2794577$$
$$\sqrt{{}^1/_4\, L^2 - 2\,Q\,K} = -\ 1903{,}083$$
$$ {}^1/_2\, L = +\ 2074{,}8$$
$$171{,}717$$

$$\log. 171{,}717 = 2{,}234813$$
$$\log. K = 2{,}914237$$
$$\log. \omega = 9{,}320576 \qquad \omega = 0{,}209207$$
$$\log. d = 1{,}563481$$
$$\log. d' = 0{,}884057 \qquad d' = 7{,}6569$$

$$9{,}320576$$
$$\log. c = 1{,}698970$$
$$\log. c' = 1{,}019546 \qquad c' = 10{,}4603.$$

Proberechnung. Hiezu berechnet man die Coordinaten des Viereckes A B Z Y und daraus seinen Inhalt Q.

$$\log. p = 1{,}556302$$
$$\log. \omega = 9{,}320576$$
$$\log. p' = 0{,}876878 \qquad p' = 7{,}531$$

$$\log. v = 0{,}819544$$
$$\log. \omega = 9{,}320576$$
$$\log. v' = 0{,}140120 \qquad v' = 1{,}380$$

$$\log. q = 1{,}681241$$
$$\log. \omega = 9{,}320576$$
$$\log. q' = 1{,}001817 \quad q' = 10{,}942$$

$$\log. w = 1{,}146128$$
$$\log. \omega = 9{,}320576$$
$$\log. w' = 0{,}466704 \quad w' = 2{,}929$$

$$a - w' = 46{,}472 \quad \log.(a - w') = 1{,}667191$$
$$\log. p' = 0{,}876878$$
$$2{,}544069 = \log. 350{,}00$$

$$a - v' = 48{,}020 \quad \log.(a - v') = 1{,}681422$$
$$\log. q' = 1{,}001817$$
$$2{,}683239 = \log. 482{,}21$$
$$832{,}21 = 2\,Q.$$

Zweite Parcelle: $Q = 832{,}2$ *); $2\,Q = 1664{,}4.$

$$\log. 2\,Q = 3{,}2212577 \qquad {}^1/_4\,L^2 = +\ 4304795{,}04$$
$$\log. K = 2{,}9142373 \qquad 2\,Q\,K = -\ 1366139{,}0$$
$$\log. 2\,Q\,K = 6{,}1354950 \qquad 2938656{,}04$$

$${}^1/_2 \log. 2938656{,}04 = 3{,}2340744$$
$$\sqrt{{}^1/_4\,L^2 - 2\,K\,Q} = -\ 1714{,}25$$
$${}^1/_2\,L = +\ 2074{,}80$$
$$360{,}55$$

$$\log. 360{,}55 = 2{,}556965$$
$$\log. K = 2{,}914237$$
$$\log. \omega = 9{,}642728 \qquad \omega = 0{,}43926$$

---

*) Q ist hier gleich der Summe von zwei Theilen.

$$\begin{array}{rl} \log.\ \omega = & 9{,}642728 \\ \log.\ d = & 1{,}563481 \\ \hline \log.\ d'' = & 1{,}206209 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} d'' \ .\ . = & 16{,}078 \\ \text{vorhg. } d' = & 7{,}656 \\ \hline \text{Kopfbreite linker Hand} = & 8{,}422 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ \omega = & 9{,}642728 \\ \log.\ c = & 1{,}698970 \\ \hline \log.\ c'' = & 1{,}341698 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} c''.\ .\ . = & 21{,}963 \\ \text{vorhg. } c' = & 10{,}460 \\ \hline \text{Kopfbr. rechter Hand} = & 11{,}503 \end{array}$$

Proberechnung.

$$\begin{array}{rl} \log.\ p = & 1{,}556302 \\ \log.\ \omega = & 9{,}642728 \\ \hline \log\ p'' = & 1{,}199030 \quad p'' = 15{,}813 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ v = & 9{,}819544 \\ \log.\ \omega = & 9{,}642728 \\ \hline \log.\ v'' = & 0{,}462272 \quad v'' = 2{,}899 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ q = & 1{,}681241 \\ \log.\ \omega = & 9{,}642728 \\ \hline \log.\ q'' = & 1{,}323969 \quad q'' = 21{,}085 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ w = & 1{,}146128 \\ \log.\ \omega = & 9{,}642728 \\ \hline \log.\ w'' = & 0{,}788856 \quad \omega'' = 6{,}1497 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} a - w'' = 43{,}2503 \quad \log.(a - w'') = & 1{,}635989 \\ \log.\ p'' = & 1{,}199030 \\ \hline & 2{,}835019 = \log. 683{,}94 \end{array}$$

Uebertrag . . 683,94

$a - v'' = 46{,}501$ $\log.(a - v'') = 1{,}667462$

$\log. q'' = 2{,}323969$

$2{,}991431 = \log. 980{,}46$

$1664{,}40 = 2\,Q.$

Dritte Parcelle: $Q = 1248{,}3$; $2\,Q = 2496{,}6$.

$\log. 2\,Q = 3{,}3973490$

$\log. K = 2{,}9142373$

$\log. 2\,Q\,K = 6{,}3115863$

$\frac{1}{4}\,L^2 = +\,434795{,}04$

$2\,Q\,K = -\,2049210{,}0$

$2255585{,}04$

$\frac{1}{2} \log. 2255585{,}04 = 3{,}1766295$

$\sqrt{\frac{1}{4}\,L^2 - 2\,Q\,K} = -\,1501{,}86$

$\frac{1}{2}\,L = +\,2074{,}80$

$572{,}94$

$\log. 572{,}94 = 2{,}758109$

$\log. K = 2{,}914237$

$\log. \omega = 9{,}843872$

$\log. d = 1{,}563481$

$\log. d''' = 1{,}407353$

$\log. \omega = 9{,}843872$

$\log. c = 1{,}698970$

$\log. c''' = 1{,}542842$

$\omega = 0{,}69803$

$d''' \;. \;. = 25{,}548$

vorhg. $d'' = 16{,}078$

Kopfbreite linker Hand $= 9{,}470$

$c''' \;. \;. \;. = 34{,}901$

vorhg. $c'' = 21{,}963$

Kopfbr. rechter Hand $= 12{,}938$

Proberechnung.

$$
\begin{array}{rll}
\log.\ p & = 1{,}556302 & \\
\log.\ \omega & = 9{,}843872 & \\
\hline
\log.\ p''' & = 1{,}400174 & p''' = 25{,}129 \\
\log.\ v & = 0{,}819544 & \\
\log.\ \omega & = 9{,}843872 & \\
\hline
\log.\ \omega''' & = 0{,}663416 & v''' = 4{,}601 \\
\log.\ q & = 1{,}681241 & \\
\log.\ \omega & = 9{,}843872 & \\
\hline
\log.\ q''' & = 1{,}525113 & q''' = 33{,}505 \\
\log.\ w & = 1{,}146128 & \\
\log.\ \omega & = 9{,}843872 & \\
\hline
\log\ w''' & = 0{,}990000 & w''' = 9{,}772 \\
a - w''' = 39{,}628 \quad \log.\ a - w''' & = 1{,}598002 & \\
\log.\ p''' & = 1{,}400174 & \\
\hline
& 2{,}998176 & = \log.\ 995{,}81 \\
a - v''' = 44{,}793 \quad \log.\ a - v''' & = 1{,}651210 & \\
\log.\ q''' & = 1{,}525113 & \\
\hline
& 3{,}176323 & = \log.\ 1500{,}77 \\
\hline
& & 2\ Q = 2496{,}61
\end{array}
$$

Vierte und letzte Parcelle.

Kopfbreite links $= d - d''' = 11{,}052$; rechts $c - c''' = 15{,}099$.

Eine Probe liegt hier in der bereits richtig befundenen Summe der drei ersten Parcellen.

Auch kann man den Inhalt des letzten Viereckes aus seinen jetzt bekannten Coordinaten unmittelbar berechnen und findet nach einer der Formeln des §. 7.

$(6,6 - 4,607) \times (25,129 + 36,0) \quad . \quad . = + \quad 121,83$
$(35,4 - 6,6) \times (36,0 + 48,0) \quad . \quad . \quad . = + \quad 2419,20$
$(39,628 - 35,4) \times (33,505 + 48,0) \quad . = + \quad 344,60$

$2885,63$

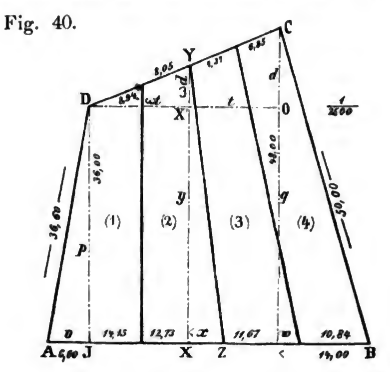
$(4,607 - 39,628) \times (25,129 + 33,505) \quad . = - \quad 2053,42$

$832,21 = 2\ Q.$

Zweites Beispiel.

Dasselbe Viereck hat man in Fig. 40 der Art getheilt, dass die Theilungslinien den Nebenseiten A D, B C, gemäss liegen; die Berechnung also nach der Formel (4) oder (5) ausgeführt.

Fig. 40.



Vorbereitung. Wieder hat man $J = 1664,4$ und $Q = 416,1$.

ad $= 49,4 \times 12 = 592,8 = K$ log. $K = 2,7729082$
(a + t) p $= (49,4 + 28,8) \times 36 = 2815,3$ log. a $= 1,6937269$
— d v $= 6,6 \times 12 = 79,2$ log. b $= 1,4941546$

$L = 2736,0$

$\frac{1}{2}\ L = 1368,0;\ \frac{1}{4}\ L^2 = 1871424,0.$

Erste Parcelle: Q = 416,1; 2 Q = 832,2.

$$\log. 2\,Q = 2{,}9202277 \qquad \tfrac{1}{4} L^2 = 1871424{,}0$$
$$\log. K = 2{,}7729082 \qquad 2\,Q\,K = 493328{,}2$$
$$\log. 2\,Q\,K = 5{,}6931359 \qquad 2364752{,}2$$

$$\tfrac{1}{2} \log. 2364752 = 3{,}1868{,}928.$$

$$\log. 169{,}78 = 2{,}2298865$$
$$\log. K = 2{,}7729082$$
$$\log. \omega' = 9{,}4569783 \qquad \omega' = 0{,}2864$$
$$\log. a = 1{,}693727$$
$$\log. a' = 1{,}150705 \qquad a' = 14{,}148$$
$$\log \omega' = 9{,}456978$$
$$\log. b = 1{,}494155$$
$$\log. b' = 0{,}951133 \qquad b' = 8{,}9358$$

Proberechnung. Wir berechnen hiezu wieder die Coordinaten des ersten Vierecks (wie sie bei A D Y Z veranschaulicht) und daraus dessen Inhalt.

$$\log. t = 1{,}459393$$
$$\log. \omega' = 9{,}456978$$
$$\log. t' = 0{,}916371 \qquad t' = 8{,}2484$$

$$\log. d = 1{,}079181$$
$$\log. \omega' = 9{,}458978$$
$$\log. d' = 0{,}536159 \qquad d' = 3{,}4368$$

$$y = p + d' = 39{,}4368$$
$$x = a' - (t' + v) = -0{,}7$$
$$a' - x = 14{,}148 + 0{,}7 = 14{,}848$$
$$a' - v = 14{,}148 - 6{,}6 = 7{,}548$$

$\log.\ (a' - x) = 1{,}171668$
$\log\ p = 1{,}556302$
$2{,}727970 \quad .\ .\ .\ .\ \quad 534{,}527$

$\log.\ (a - v) = 0{,}877832$
$\log.\ y = 1{,}595091$
$2{,}473733 \quad .\ .\ .\ .\ \quad 297{,}669$

$832{,}196 = 2\ Q.$

Zweite Parzelle: $Q = 832{,}2;\ 2\ Q = 1664{,}4.$

$\log.\ 2\ Q = 3{,}2212577$ | $\frac{1}{4}\ L^2 = 1871424$
$\log.\ K = 2{,}7729082$ | $2\ Q\ K = 986656{,}4$
$\log.\ 2\ Q\ K = 5{,}9941659$ | $2858080{,}4$

$\frac{1}{2}\ \log.\ 28580804 = 3{,}2280372$
$\sqrt{\frac{1}{4} L^2 + 2\ Q\ K} = 1690{,}586$
$-\ \frac{1}{2}\ L = 1368$
$322{,}586$

$\log.\ 322{,}58 = 2{,}5086455$
$\log.\ K = 2{,}7729082$
$\log.\ \omega'' = 9{,}7357373 \qquad \omega'' = 0{,}54417$
$\log.\ a = 1{,}693727$
$\log.\ a'' = 1{,}429464 \qquad a''\ .\ .\ . = 26{,}882$
vorhgh. $a' = 14{,}148$
Untere Kopfbreite $= 12{,}734$

$\log.\ \omega'' = 9{,}735737$
$\log.\ b = 1{,}494155$
$\log.\ b'' = 1{,}229892 \qquad b''\ .\ .\ . = 16{,}978$
vorhgh. $b' = 8{,}936$
Obere Kopfbreite $= 8{,}042$

Proberechnung.

$$\log. t = 1{,}459393$$
$$\log. \omega'' = 9{,}735737$$
$$\log. t'' = 1{,}195130 \qquad t'' = 15{,}672$$

$$\log. d = 1{,}079181$$
$$\log. \omega = 9{,}735737$$
$$\log. d'' = 0{,}814918 \qquad d'' = 6{,}530$$

$$y'' = p + d'' = 42{,}530$$
$$x'' = a'' - (t'' + v) = + 4{,}610$$
$$a'' - x'' = 22{,}272$$
$$a'' - v = 20{,}282$$

$$\log. (a'' - x'') = 1{,}387{,}740$$
$$\log. p'' = 1{,}556302$$
$$2{,}904042 = \log. 801{,}76$$

$$\log. (a - v'') = 1{,}307111$$
$$\log. y'' = 1{,}628695$$
$$2{,}935805 = \log. 862{,}59$$
$$1664{,}35 = 2\ Q.$$

Dritte Parcelle: $Q = 1248{,}3$; $2\ Q = 2496{,}6$.

$$\log. 2\ Q = 3{,}3973490 \qquad {}^1/_4\ L^2 = 1871424$$
$$\log. K = 2{,}7729082 \qquad 2\ Q\ K = 1479984$$
$$\log. 2\ Q\ K = 6{,}1702572 \qquad 3351408$$

$$^1/_2 \log. 3351408 = 3{,}1766295$$
$$\sqrt{{}^1/_4\ L^2 - 2\ Q\ K} = 1830{,}685$$
$$^1/_2\ L = 1368{,}0$$
$$462{,}685$$

$$\begin{aligned} \log.\ 462{,}685 &= 2{,}6652873 \\ \log.\ K &= 2{,}7729082 \\ \hline \log.\ \omega''' &= 9{,}8923791 \qquad \omega''' = 0{,}7805 \\ \log.\ a &= 1{,}693727 \\ \hline \log.\ a''' &= 1{,}586096 \\ \log.\ \omega''' &= 9{,}892379 \\ \log.\ b &= 1{,}494155 \\ \hline \log.\ b''' &= 1{,}386534 \end{aligned}$$

a''' . . .	=	38,556
vorhg. a''	=	26,882
Untere Kopfbreite	=	11,674
b''' . . .	=	24,352
vorhg. b''	=	16,978
Obere Kopfbreite	=	7,374

Proberechnung.

$$\begin{aligned} \log.\ t &= 1{,}459393 \\ \log.\ \omega''' &= 9{,}892379 \\ \hline \log.\ t''' &= 1{,}351772 \qquad t''' = 22{,}479 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ d &= 1{,}079181 \\ \log.\ \omega''' &= 9{,}892379 \\ \hline \log.\ a''' &= 0{,}971560 \qquad a''' = 9{,}366 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''' &= p + u''' = 45{,}366 \\ x''' &= a''' - (v + t''') = +\ 9{,}477 \\ a''' - x''' &= 29{,}079 \\ a''' - v &= 31{,}965 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ (a''' - x''') &= 1{,}463579 \\ +\ \log.\ p &= 1{,}556302 \\ \hline & 3{,}019881 = \log.\ 1046{,}84 \end{aligned}$$

$$\text{Uebertrag} \; . \; . \; 1046{,}84$$

$$\log.\,(a''' - v') = 1{,}504552$$
$$+ \log.\, y''' = 1{,}656730$$
$$3{,}161282 = \log.\, 1449{,}72$$
$$2496{,}56 = 2\ \text{Q}.$$

Vierte und letzte Parcelle:

Untere Kopfbreite $a'''' = a - a''' = 10{,}844$
Obere Kopfbreite $b'''' = b - b''' = \ 6{,}848$

Proberechnung. Sie besteht wieder in der Berechnung des letzten Vierecks, wofür man bereits die Ordinaten und Abschnitte kennt. Der Abschnitt x''' ist hiebei negativ zu nehmen.

$$a'''' - x''' = 10{,}844 + 9{,}477 = 20{,}321$$
$$a'''' - w - 10{,}844 - 14{,}0 = - \ 3{,}156$$

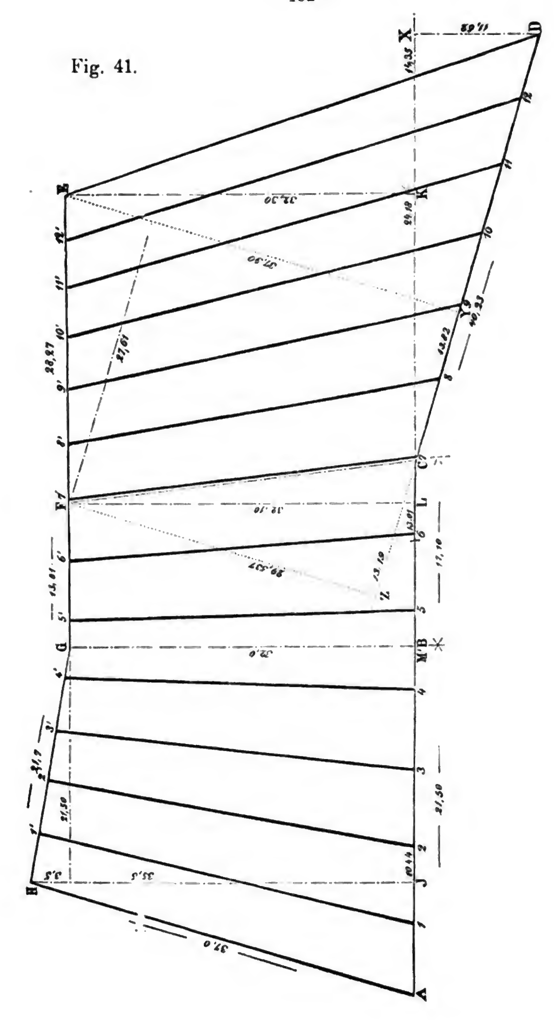
$$\log.\,(a'''' - w) = 0{,}499137$$
$$\log.\, y''' = 1{,}656730$$
$$2{,}155867 \qquad 975{,}407$$

$$\log.\,(a'''' - x''' = 1{,}307945$$
$$\log.\, q = 1{,}681241$$
$$2{,}989186 \qquad 143{,}175$$
$$832{,}232$$

Drittes Beispiel.

Das Feld, dessen Aufnahmsgerippe durch die Zeichnung Fig. 41 deutlich angegeben, soll in Parcellen von 200 Ruthen getheilt werden, in der Art, dass die Theilungslinien auf die obere und untere Seite stossen. Der Inhalt des Ganzen beträgt

Fig. 41.



2609,959 Quadratruthen, es gibt also 13 Theile von je 200 Ruthen, deren Letzterm die überschüssigen 9,959 zugeschieden werden.

Wegen der Verschiedenheit in der Länge genannter zwei Seiten kann eine Paralleltheilung hier nicht gebraucht werden, und wir wählen desshalb die symmetrische Theilungsart. Diese aber anwenden zu können, hat man das ganze Feld vorerst in drei Vierecke zerlegt: D C F E, C B G F und B A H G.

Man suchte nämlich eine Länge E F so, dass sich verhielte: die Länge D C A zu D C, wie die Länge E G H zu E F, und fand hiefür 28,27. Sodann suchte man eine Länge A M, welche zu A C D in demselben Verhältniss stund, wie H G zu H G E; weil aber diese Länge dicht bis zum Fusspunkte B des Perpendikels G B reichte, und es doch nicht auf ein ganz strenges Verhältniss ankam, so hat man A B als Basis des dritten Vierecks genommen. Die Seiten der drei Vierecke, nämlich A B und H G, B C und G F, C D und F E stehen daher vollkommen, oder nahezu in einerlei Verhältniss mit der untern und obern Gesammtbreite der Figur.

Eine weitere Vorarbeit bestand noch darin, dass die Coordinaten des dritten Vierecks, welche in Bezug auf die Axe A X gegeben sind, nun auf die Grundlinie C D übertragen werden. Man nahm C als Ursprung, so ergab sich

$$X\,C\,D = \varphi,\ \sin\varphi = -\frac{11{,}62}{40{,}23};\ \cos.\ \varphi = \frac{38{,}52}{40{,}23}$$

Für den Punkt E waren gegeben C K oder $x = + 24{,}18$; E K oder $y = + 32{,}30$, man findet C Y oder $x' = + 13{,}82$; E Y oder $y' = 37{,}90$.

Für den Punkt F darf man vorerst, in Betracht des geringen Unterschiedes der Coordinaten G B und E K die Länge G E = B K annehmen, daher B L = G F = 13,01 und L C = 17,10 — 13,01 = 4,09; welcher Wert in dem Vierecke D C F E

negativ zu nehmen ist. Der Unterschied von B G und E K ist gleich 32,30 — 32,00 = 0,3, hiernach findet sich der Unterschied von B C und F L, nämlich

$$B\,G - F\,L = \frac{0,3\,.\,B\,L}{B\,K} = 0,1, \text{ oder } F\,L = 30,10.$$

Somit also ergibt sich für den Punkt F:

$$x = -\,4,09;\ y = +\,32,10; \text{ und}$$
$$x' = C\,Z = -\,13,19;\ y' = F\,Z = 29,537.$$

Als Inhalte der drei Vierecke folgt aus diesen Coordinaten

$$A\,B\,G\,H = 910,935$$
$$B\,C\,F\,G = 482,615$$
$$C\,F\,E\,D = 1216,409$$

daher $J = 2609,959$ wie oben.

Es gewährt einen kleinen Vortheil, die Theilung bei dem Perpendikel B G zu beginnen.

Im ersten Viereck anfangend, hat man:

$$a = A\,B = 31,94;\ p = B\,G = 32,0;\ v = 0;$$
$$q = H\,J = 35,50;\ w = 10,44;\ d = 3,50;\ t = 21,50.$$

Hieraus:

$$K = 31,94 \times 3,5 = 111,790$$
$$L = (31,94 + 21,50)\,32,0 = 1710,080$$

$$1821,870 = 2\,J$$
$$910,935\ J.$$

Erste Parcelle:

Diese abzuschneiden, setzen wir Q gleich dem Viereck B G 1′ 1, nämlich gleich 910,935 — 200 = 710,935. Es findet

sich dann, die vollständige Rechnung, sowie die Proberechnung weglassend:

$$\omega = 0{,}79059$$
$$a' = 25{,}252$$
$$b' = 17{,}290$$

und $A\,1 = 31{,}94 - 25{,}252 = 6{,}688$

$H\,1' = 21{,}88 - 17{,}290 = 4{,}590$

Zweite Parcelle:

$$Q = 910{,}935 - 400 = 510{,}935.$$

$$\omega = 0{,}57587$$
$$a' = 18{,}393$$
$$b' = 12{,}600$$

$$1\,.\,2 = 25{,}252 - 18{,}393 = 6{,}859$$
$$1'\,2' = 17{,}290 - 12{,}600 = 4{,}690.$$

Dritte Parcelle:

$$Q = 910{,}935 - 600 = 310{,}935.$$

$$\omega = 0{,}35539$$
$$a' = 11{,}351$$
$$b' = 7{,}776$$

$$2\,.\,3 = 18{,}393 - 11{,}351 = 7{,}042$$
$$2'\,3' = 12{,}600 - 7{,}776 = 4{,}824.$$

Vierte Parcelle:

$$Q = 910{,}935 - 800 = 110{,}935.$$

$$\omega = 0{,}12866$$
$$a' = 4{,}109$$
$$b' = 2{,}815$$

$$3 \,.\, 4 = 11{,}351 - 4{,}109 = 7{,}242$$
$$3'\, 4' = 7{,}776 - 2{,}815 = 4{,}961.$$

Fünfte Parcelle:

Der Rest M G 4′ 4 beträgt 110,935, das Fehlende zu 200 nämlich 89,065 macht daher das erste Q in dem Vierecke B G F C. Uebrigens ist hier

$$a = 17{,}10,\ t = 13{,}01,\ p = 32{,}00,\ v = 0;\ q = 32{,}101;\ w = 4{,}09.$$

$$K = 17{,}1 \times 0{,}1 = 1{,}71$$
$$L = (17{,}1 + 13{,}01) \times 32 = 963{,}52$$
$$965{,}23 = 2\,J$$
$$482{,}615 = J.$$

$$\omega = 0{,}1848$$
$$a' = 3{,}160$$
$$b' = 2{,}401.$$

Sechste Parcelle:

$$Q = 89{,}065 + 200 = 289{,}065.$$

$$\omega = 0{,}7994$$
$$a' = 10{,}25$$
$$b' = 77{,}98$$

$$5 \,.\, 6 = 10{,}25 - 3{,}16 = 7{,}09$$
$$5'\, 6' = 7{,}798 - 2{,}404 = 5{,}394.$$

Siebente Parcelle:

Das jetzige Q wäre gleich dem vorigen mehr 200, d. i.
$= 489{,}065$
Das Viereck M G F C aber ist $= 482{,}615$

Unterschied $= -\ 6{,}450$

Diese 6,45 sind daher das erste Q im dritten Viereck C F E D.

Ausserdem ist hier a $=$ 40,23, t $=$ 27,01, p $=$ 29,537, v $= -$ 13,19, q $=$ 37,90, also d $=$ 8,363.

$$(a + t) \cdot p = 67{,}24 \times 29{,}537 = 1986{,}068$$
$$- d\, c = 8{,}363 \times - 13{,}19 = + \ 110{,}308$$
$$L = 2096{,}376$$
$$ad = 40{,}23 \times 8{,}369 = K = 336{,}443$$
$$2432{,}819 = 2\ J.$$
$$1216{,}409 = J.$$

Hieraus

$$Q = 6{,}45$$
$$\omega = 0{,}00614$$
$$a' = 0{,}247$$
$$b' = 0{,}174.$$

Achte Parcelle:

$$Q = 6{,}45 + 200 = 206{,}45.$$
$$\omega = 0{,}19109$$
$$a' = 7{,}687$$
$$b' = 5{,}402.$$
$$7 \cdot 8 = 7{,}687 - 0{,}247 = 7{,}440$$
$$7'\ 8' = 5{,}402 - 0{,}174 = 5{,}228.$$

Neunte Parcelle:

$$Q = 406{,}45;\ \omega = 0{,}3662;\ a' = 14{,}733;\ b' = 10{,}353$$
$$8 \cdot 9 = 7{,}046;\ 8' \cdot 9' = 4{,}951.$$

Zehnte Parcelle:

$$Q = 606{,}45;\ \omega = 0{,}53295;\ a' = 21{,}440;\ b' = 15{,}10$$
$$9 \cdot 10 = 6{,}707.$$

Eilfte Parcelle:

$$Q = 806{,}45;\ \omega = 0{,}6924;\ a' = 27{,}855;\ b' = 19{,}574$$
$$10 . 11 = 6{,}415.$$

Zwölfte Parcelle:

$$Q = 1006{,}45;\ \omega = 1{,}84544;\ a' = 34{,}012;\ b' = 23{,}900$$
$$11 . 12 = 6{,}157.$$

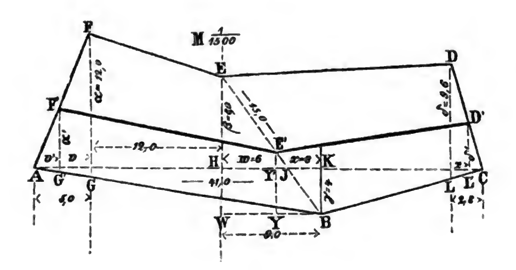
Dreizehnte Parcelle:

Diese ist schon durch die zwölfte festgesetzt, und durch die Proberechnung für diese auch bestätigt. Will man eine direkte Probe, so berechnet man aus der sonst bekannten Grundlinie 12 . D und den Coordinaten der oberen Eckpunkte 12' . D den Inhalt der dreizehnten Parcelle; er findet sich 209,831, kann also, da er 209,959 betragen sollte, für richtig betrachtet werden.

§. 25.

Auch da, wo gebrochene Theilungslinien vorkommen, lässt sich die symmetrische Zerlegungsart mit Vortheil anwenden, wie nachfolgende Beispiele zeigen werden.

Fig. 42.



I. Das Feld A B C D E F Fig. 42 soll in gegebenem Verhältnisse abgetheilt werden, und zwar, indem man die Diagonale E B zieht, wird verlangt, dass die Stücke F F′ und F A, E E′ und E B, D D′ und D C in einerlei Verhältniss stehen.

Man bezeichne die Ordinaten von A anfangend der Reihe nach mit α, β, γ, δ. Die Abschnitte A G, H J, J K, L C mit v, w, x, z. Die Abscissenlinie A G = a, ihre Theile A J, J C mit t und q. Hiernach den doppelten Inhalt der Figur

$$2J = t(\alpha+\beta) - \beta v - \alpha w + q(\beta+\delta) + \delta w - \beta z + a\gamma.$$

F′ E′ D′ sey die Theilungslinie, und der Bedingung nach:

$$\frac{A F'}{A F} = \frac{B E'}{B E} = \frac{C D'}{C D} = \omega.$$

Die Ordinaten und zugehörige Abschnitte der Theilungspunkte F′, E′, D′, nämlich A G′ und F′ G′, J Y′ und E′ Y′ L′ C und D′ L′ setzen wir α' und v′, β' und w′, δ' und z′, also $\alpha' = \omega\,\alpha$; $v' = \omega\,v$; $\delta' = \omega\,\delta$; $z' = \omega\,z$.

Zur Bestimmung von β' und ω' haben wir B W parallel mit A C angenommen

$$\frac{B Y}{B W} = \frac{x + w'}{x + w} = \frac{E' Y}{E W} = \frac{\gamma + \beta'}{\gamma + \beta} = \omega$$

daher:

$$\left.\begin{aligned} \beta' &= \omega\,\beta + \omega\,\gamma - \gamma \\ w' &= \omega\,w + \omega\,x - x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hiernach der doppelte Inhalt der abzuschneidenden Fläche A F E D C B.

$$2Q = t(\alpha' + \beta') - \alpha' w' - \beta' v' + q(\beta' + \delta') + \delta' w' - \beta' z' - \gamma a.$$

Für α', v' und δ' z' die Werte $\omega\,\alpha$, ω v und $\omega\,\delta$, ω z eingeführt, für β' und w' aber jene aus (1) auch gehörig reduzirt, kommt:

$$2\,Q = \omega^2\,[(\delta - \alpha)(w + x) - (\beta + \gamma)(z + v)] +$$
$$\omega\,[t(\alpha + \beta + \gamma) + q(\beta + \gamma + \delta) + - x(\alpha + \delta) + \gamma(v + z)]$$

oder indem man wieder die Factoren von ω^2 und ω mit K und L bezeichnet.

$$\omega = \frac{-\frac{1}{2}L + \sqrt{2\,Q\,K + \frac{1}{4}L^2}}{K} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Es seyen nun die Maase gegeben, wie Figur 42 sie anzeigt, wornach man vorerst $J = 432$ Quadratruthen findet; das abzuschneidende Stück betrage einen halben Morgen von 200 Quadratruthen.

Sofort:

$$(x + w)(\delta - \alpha) = 9{,}0 \times 2{,}4 \;=\; -\;21{,}6$$
$$(z + v)(\beta + \gamma) = 7{,}8 \times 12{,}0 = -\;93{,}6$$
$$K = \ldots\ldots - 115{,}2$$

$$t(\alpha + \beta + \gamma) = 23 \times 24 = +\;552{,}0$$
$$q(\beta + \gamma + \delta) = 18 \times 21{,}6 = +\;388{,}8$$
$$x(\alpha - \delta) = 3 \times 2{,}4 = +\;7{,}2$$
$$\gamma(v + z) = 7{,}8 \times 4 = +\;31{,}2$$
$$L = \ldots\ldots\ldots + 979{,}2$$
$$K + L = 864{,}0 = 2\,J.$$

$$\tfrac{1}{4}\,L^2 = 239708$$
$$2\,Q\,K = 46080$$
$$193628$$

$\sqrt{193128} = + 440{,}03$ | log. $193628 = 5{,}2869682$

$- \frac{1}{2} L = - 489{,}60$ | $2) = 2{,}6434841$

$= \log. 440{,}03$

Zähler $= - 49{,}57$

log. $49{,}57 = 1{,}6952014$

$- 49{,}57 : - 115{,}2 = 0{,}43029 = \omega$ | $-$ log. $115{,}2 = 2{,}0614525$

log. $\omega = 9{,}6337489$

$\omega = 0{,}43029$

A P' $= 13 \times 0{,}43 = 5{,}59$; B E' $= 15 \times 0{,}43 = 6{,}45$; C D' $= 10 \times 0{,}43 = 4{,}30$.

Proberechnung.

$$\alpha' = 12 \times 0{,}4303 = 5{,}1636$$
$$v' = 5 \times 0{,}4303 = 2{,}1515$$
$$\beta' = 12 \times 0{,}4303 - 4{,}0 = 1{,}1636$$
$$w' = 9 \times 0{,}4303 - 3{,}0 = 0{,}8727$$
$$\delta' = 9{,}6 \times 0{,}4303 = 4{,}1309$$
$$z' = 2{,}8 \times 0{,}4303 = 1{,}2048$$

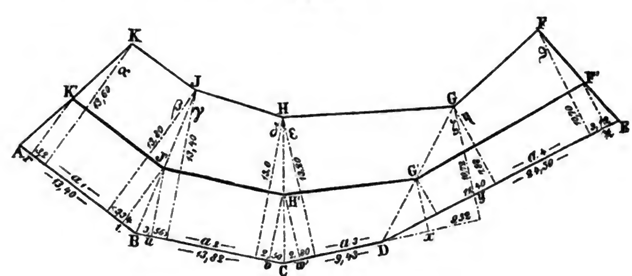
$$t' = 23 - 2{,}1515 - 0{,}8727 = 19{,}9758$$
$$q' = 18 + 0{,}87 - 1{,}2048 = 17{,}6679$$

$$\alpha' v' = 11{,}1077$$
$$t' (\alpha' + \beta') = 126{,}3881$$
$$q' (\beta' + \gamma') = 93{,}5344$$
$$\delta' z' = 4{,}9785$$
$$a \gamma = 164{,}0$$
$$400{,}0087 = 2 Q.$$

Der kleine jedenfalls unbedeutende Ueberschuss über 400 rührt daher, dass man die Proberechnung mit drei Dezimalstellen geführt und die letzte jeweils um 1 vermehrt hatte, wenn die vierte Stelle grösser als 5 war. Ohne solches würde sich ein kleiner Mangel gezeigt haben.

Die Behandlung vorstehender Aufgabe wäre einfacher geworden, wenn das Feldstück durch die Diagonale E B in zwei Vierecke zerlegt und in jedem dieser Vierecke die Coordinaten auf die Grundlinie A B, B C bezogen hätte, wie es in dem nachfolgenden Beispiele der Fall.

Fig. 43.



Das Feld ACEFHK (Fig. 43) soll der Länge nach durch eine gebrochene Linie K′ J′ H′ G′ F′ in zwei gleiche Theile getheilt werden, und man verlangt, dass auf den Seiten und Diagonalen K A, J B, H C, G D, F E die Breite K K′ und K A; J J′ und J B, H H′ und H C u. s. w. in gleichem Verhältniss stehen sollen. Die Coordinaten der Eckpunkte K, J, H, G, F beziehen sich auf die Grundlinien A B, B C, C D, D E der einzelnen von den Diagonalen gebildeten Vierecke.

Die Grundlinien sollen mit a_1 a_2 a_3 a_4 bezeichnet werden, die Ordinaten der oberen Eckpunkte der Reihe nach mit α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, die Abschnitte auf den Grundlinien mit r, t, u, v, w, x, y, z.

Das Verhältniss $\frac{K\,K'}{K\,A} = \frac{J\,J'}{J\,B}$ etc. . . . werde $= \omega$ gesetzt, so hat man in dem ersten Viereck

$$\omega^2 (\alpha\, t + \beta\, r) - \omega\, a_1\, (\alpha + \beta) = -\, 2\, A\, B\, J'\, K'$$

im zweiten Vierecke

$$\omega^2 (\gamma v + \delta u) - \omega a_2 (\gamma + \delta) = -2 B C H' J'$$

. . . . . u. s. w.,

also in Summa

$$\omega^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha t + \beta r \\ \gamma v + \delta u \\ \varepsilon x + \zeta w \\ \eta z + \vartheta y \end{matrix} \right\} - \omega \left\{ \begin{matrix} a_1 (\alpha + \beta) \\ a_2 (\gamma + \delta) \\ a_3 (\varepsilon + \zeta) \\ a_4 (\eta + \vartheta) \end{matrix} \right\} = -2 Q.$$

woraus $\omega = \dfrac{\frac{1}{2} L - \sqrt{\frac{1}{4} L^2 - Q K}}{K}$

Wenn man nämlich wieder unter K und L die Coeffizienten von ω^2 und ω versteht.

Nach den Zahlenwerten, welche aus der Figur zu entnehmen, findet man: vorerst den Gesammtinhalt $J = 591{,}656$; sodann

$$L = 1400{,}5336$$
$$K = -\ 217{,}2216$$
$$\text{Unterschied} = 1183{,}3120 = 2\ J$$

$$\tfrac{1}{2}\ L = 700{,}2668$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}\ L^2 - 2\ Q\ L} = 601{,}542$$
$$\text{Zähler} = 98{,}7248$$

$$\text{log. des Zählers} = 1{,}9944262$$
$$\text{log. } K = 2{,}3369018$$
$$\text{log. } \omega = 9{,}6575244 \quad \omega = 0{,}45449.$$

A K' $= \omega$ A K $= \omega$ 14,0 $=$ 6,36; B J' $= \omega$ B J $= \omega$ 14,21 $=$ 6,44; C H' $= \omega$ C H $= \omega$ 13,26 $=$ 602; D G' $= \omega$ D G $= \omega$ 13,86 $=$ 6,31; E F' $= \omega$ E F $= \alpha$ 10,67 $=$ 4,85.

Zur Probe berechnet man die einzelnen Vierecke und findet

A B J' K . . .	=	149,21
B C H' J' . . .	=	150,39
C D G' H' . . .	=	121,28
D E F' G' . . .	=	170,76
		591,64 = 2 Q.

In *Bleibtreu's* Theilungslehre*) findet sich die vorstehende Aufgabe für den Fall gelöst, wenn die Theilungslinie K' J' H' G' F' den Seiten A B C D E parallel seyn soll; und wofür die Formeln des §. 19 angewendet werden können.

Setzt man im vierten Viereck die Ordinate von K' oder J' $= y_1$, so bestimmt dies die Ordinaten y_2, y_3, y_4 der Punkte J' H' G' in den drei folgenden Vierecken, denn man hat nun

$$\frac{y_1}{\beta} = \frac{y_2}{\gamma} \quad \text{woraus } y_2 = \frac{y_1 \gamma}{\beta}$$

$$\frac{y_2}{\delta} = \frac{y_3}{\varepsilon} \quad \text{„} \quad y_3 = \frac{y_2 \varepsilon}{\delta} = \frac{y_1 \gamma \varepsilon}{\beta \delta}$$

$$\frac{y_3}{\zeta} = \frac{y_4}{\eta} \quad \text{„} \quad y_4 = \frac{y_3 \eta}{\zeta} = \frac{y^1 \gamma \varepsilon \eta}{\beta \delta \zeta}$$

Sofort sollen s_1, s_2, s_3, s_4 r wie in genanntem §. in jedem der Vierecke die Summe der Cotangenten von den Winkeln an der Grundlinie bedeuten, und a_1, a_2, a_3, a_4 die Grundlinie A B, B C, C D, D E, dann hat man im ersten Vierecke

$$2\, a_1\, y_1 - s_1\, y_1 = 2 \text{ A B J' K'}$$

$$2\, a_2 \frac{\gamma}{\beta} y_1 - s_2 \frac{\gamma_2}{\beta_2} \overline{y_1}^2 = 2 \text{ B C H' J'}$$

*) Frankfurt 1819

$$2\ a_3\ \frac{\gamma\ \varepsilon}{\beta\ \delta}\ y_1 - s_3\ \frac{\gamma_2\ \varepsilon_2}{\beta_2\ \delta_2}\ \overline{y_1}^2 = 2\ C\ D\ G'\ H'$$

$$2\ a_4\ \frac{\gamma\ \varepsilon\ \eta}{\beta\ \delta\ \zeta}\ y_1 - s_4\ \frac{\gamma_2\ \varepsilon_2\ \eta_2}{\beta_2\ \delta_2\ \zeta_2}\ \overline{y_1}^2 = D\ E\ F'\ G'$$

und somit

$$\overline{y_1}^2 \left(s_2 + s_2\ \frac{\gamma_2}{\beta_2} + s_3\ \frac{\gamma_2\ \varepsilon_2}{\beta_2\ \delta_2} + \varsigma^4\ \frac{\gamma_2\ \varepsilon_2\ \eta_2}{\beta_2\ \delta_2\ \zeta_2}\right)$$

$$- y_1 \left(2\ a^1 + \ldots + 2\ a_2 \frac{\gamma}{\beta} + 2\ a_3\ \frac{\gamma\ \varepsilon}{\beta\ \delta} + 2\ a_4\ \frac{\gamma\ \varepsilon\ \eta}{\beta\ \delta\ \zeta}\right) = -2\ Q.$$

und wiederum, nach angenommener, Bezeichnung

$$y' = \frac{{}^1/_2\ L - \sqrt{{}^1/_4\ L - 2\ Q\ K}}{K}$$

In den gegebenen Zahlen hat man $s_1 = 0{,}47747$; $s_2 = 0{,}456979$; $s_3 = -0{,}657282$; $s_4 = 1{,}752583$.

Hiernach $K = 1{,}1909926$ $\quad {}^1/_2\ L = 53{,}87330$

$-\sqrt{{}^1/_4\ L^2 - {}^1/_4\ 2\ Q\ K} = 46{,}87993$

Zähler $= 6{,}99337$

log. des Zählers $= 0{,}844686$

log. $K = 0{,}075876$

log. $y_1 = 0{,}768810$

Sofort $y_2 = 5{,}70$; $y_3 = 5{,}79$; $y_4 = 4{,}255$.

Proberechnung.

$z_1 = K'\ J' = 13{,}4 - 2{,}8 = 10{,}60$; $z_2 = J'\ H' = 13{,}82 - 2{,}61 = 11{,}21$; $z_3 = 9{,}43 + 3{,}8 = 13{,}23$; $z_4 = 24{,}5 - 7{,}46 = 17{,}04$.

2 A B J' K'	=	24,0 × 5,87	=	140,88
2 B C H' J'	=	25,04 × 5,7	=	142,72
2 C D G' H'	=	22,66 × 5,79	=	131,20
2 D D F' G'	=	41,54 × 4,255	=	176,76

591,56 = 2 Q = J.

Schluss. Die symmetrische Theilungsart leitet unter andern auch auf einige allgemeine Eigenschaften des Viereckes. Durch A, B, C, D sollen die Ecken eines solchen bezeichnet seyn*), die Figur sey durch eine Linie E F, welche den A D, B C gemäss liegt, symmetrisch getheilt, es sey auch durch eine zweite Linie G H, welche den A B, D C gemäss liegt, wieder symmetrisch getheilt; dergestalt also, dass man hat

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC} \text{ und } \frac{AG}{AD} = \frac{BH}{BC}$$

Die beiden Theilungslinien sollen sich selbst in einem Punkt J durchschneiden; dann stehen ihre Abschnitte in demselben Verhältniss wie die Grenzlinien, denen gemäss sie liegen, nämlich man hat auch

$$\frac{GJ}{GH} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{DC} \text{ und } \frac{EJ}{EF} = \frac{AG}{AD} = \frac{BH}{BG}$$

Wird das Viereck durch beliebige, den A B, C D gemäss liegende Gerade in symmetrische Abschnitte getheilt, und man zieht in jedem Viereck die Diagonalen, so liegen deren Durchschnittspunkte auf einer Geraden, welche dem System der zu A D, B C gemäss liegenden Theilungslinien gehört. Man wird hierin, wie in dem Inhalte der Anmerkung Seite 119 projektive Eigenthümlichkeiten des windischen Paraboloides erkennen.

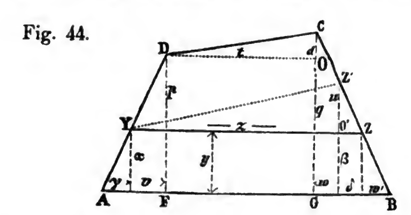
*) Der Leser entwerfe sich die Figur, welcher Fig. 31 zum Vorbild dienen wird.

Theilung aus gegebenen Punkten.

§. 26.

I. **Aufgabe.** *Von dem Viereck* A B C D *(Fig. 44) soll ein Stück* Q *abgeschnitten werden, so dass die Theilungslinie* Y Z *durch den Punkt* Y *geht, welcher auf der Seite* D A *gegeben ist.*

Fig. 44.



Die Coordinaten beziehen sich auf die Grundlinie als Axe, und an diese soll das abzuschneidende Stück stossen.

Mit dem Punkt Y ist auch seine Ordinate und der zugehörige Abschnitt gegeben, denn man kennt die Entfernung A Y. Setzt man daher das Verhältniss A Y : A D $=$ e, so ist die Ordinate von Y, nämlich $\alpha = e\,p$, und der Abschnitt $\gamma = e\,v$. Es handelt sich jetzt den Punkt Z′ zu bestimmen. Setzen wir das noch unbekannte Verhältniss B Z′ : B C $= \varphi$, so ist die Ordinate von Z′, nämlich $\beta = \varphi\,q$ und der Abschnitt Z K, d. i. $\delta = \varphi\,w$. Aber nach der gestellten Bedingung muss seyn.

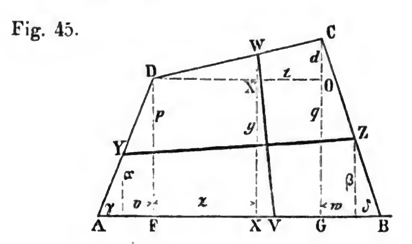
$$(a - \delta)\,\alpha + (a - \gamma)\,\beta = 2\,Q.$$

oder $$(a - \varphi\,w)\,\alpha + (a - \gamma)\,\varphi\,q = 2\,Q \quad . \;.\; . \;(1)$$

woraus $$\varphi = \frac{2\,Q - a\,\alpha'}{q\,(a - \gamma) - \alpha\,w} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; (2)$$

II. **Zweiter Fall.** *Die Theilungslinie* W V *Fig.* **45** *soll durch einen Punkt* W *gehen, welcher auf der Seite* D C *gegenüber der Grundlinie gegeben ist.*

Fig. 45.



A V W D = Q sey das abzuschneidende Stück. Die Lage des Punktes W bestimmt hier wieder dessen Coordinaten, denn setzt man das Verhältniss D W : D C = e, so ist W X' = e d, also W X = y = p + e d. Desgleichen D X' = J X = z = e t; und zu bestimmen bleibt nur der Abschnitt X V = x; hiezu aber hat man die Gleichung

$$(z + v)\, p + (z + x)\, y = 2\, Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

woraus

$$x = \frac{2\, Q - p\,(z + v)}{y} - z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

III. **Dritter Fall.** *Der Theilungspunkt* V *ist auf der Grundlinie gegeben. Fig.* **45.**

Hier nun bleibt W der zu bestimmende Punkt. Setzen wir abermals das noch unbekannte Verhältniss D W : D C = e; die gegebene Länge A V = a' unterhalten im Obigen die früheren Bezeichnungen bei, wonach X W = y = p + e d, oder F X = D X' = e t, so muss seyn

$$(v + z)\, p + (a' - v)\, y = 2\, Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\text{d. i. } (v + e\, t)\, p + (a' - v)\, (p + e\, d) = 2\, Q$$

hieraus

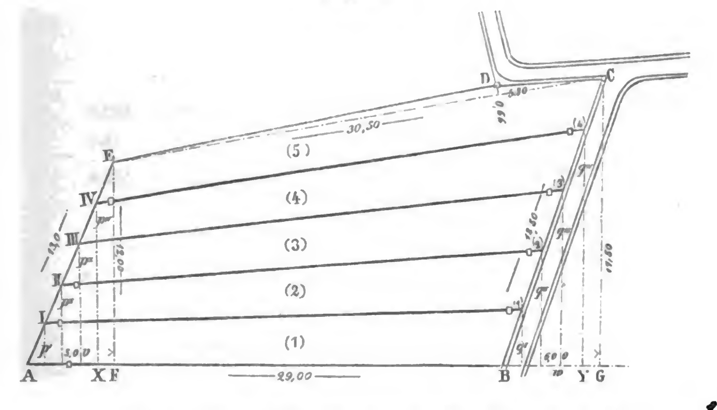
$$e = \frac{2\, Q - a'\, p}{d\, (a' - v) + p\, t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

§. 27.

Beispiele.

Erstens. Das Feld A B C D E (Fig. 46) soll in 5 gleiche Theile getheilt werden, dergestalt, dass die Stücke auf der Seite A E gleiche Breite erhalten.

Fig. 46.



Der Inhalt beträgt 430 Quadratruthen, also ein Theil = 86; da nun das Dreieck E C D kleiner ist als ein solcher Theil, kann es bei der Theilung ausser Acht gelassen und die Berechnung nach der Formel (2) geführt werden.

Vorbereitung. Die Breite eines jeden Stückes auf A E ist $= \frac{1}{5} \times 13 = 2{,}6$.

Perpendikel und Abschnitt des ersten Theilpunktes sind $\frac{1}{5} \times 12 = 2{,}4$ und $\frac{1}{5} \times 5 = 1$.

Die gleichnamigen Linien des zweiten Theilpunktes sind $\frac{2}{5} \times 12{,}0$ und $\frac{2}{5} \times 5{,}0$, d. i. $= 4{,}8$ und $2{,}0$.

Des dritten Theilpunktes $\frac{3}{5} \times 12{,}0$ und $\frac{3}{5} \times 5{,}0$, d. i. $= 7{,}2$ und $3{,}0$.

Des vierten Theilpunktes $= 9{,}6$ und $4{,}0$.

Nach der Lage von B G oder w in der Fig. 46 muss dessen Wert negativ, also das zweite Glied im Nenner der Formel (2) (Seite 147) positiv genommen werden. Im Uebrigen soll die Seite B C mit b, und die Abstände B (1); . . . B (2) . . . etc., mit b_1, b_2 . . . bezeichnet seyn.

Berechnung.

Erste Parcelle. $Q = 86{,}0$.

$2\,Q = 172{,}0$
$-\,a\,p = 69{,}6$
Zähler $= 102{,}4$

$q\,(a - v) = 17{,}5 \times 28 = 490{,}0$
$+\,p'\,w = 14{,}4$
Nenner $= 504{,}4$

log. des Zählers $= 2{,}010300$
log. „ Nenners $= 2{,}702775$

log. $\varphi = 9{,}307525$ $\qquad \varphi = 0{,}2030$
log. b $= 1{,}267171$

log. B 1 $= 0{,}574696$ $\qquad$ B 1 $= 3{,}756$.

Proberechnung.

log. $\varphi = 9{,}307525$
log. q $= 1{,}243038$

log. q′ $= 0{,}550563$ $\qquad$ q′ $= 3{,}553$

$$\log. \varphi = 9{,}307525$$
$$\log. w = 0{,}778151$$
$$\log. w' = 0{,}085676 \qquad w' = 1{,}218.$$

$$\log. (a + w') = 1{,}480266$$
$$\log. p' = 0{,}380221$$
$$1{,}860487 = \log. 72{,}525$$

$$\log. (a + v') = 1{,}447158$$
$$\log. q' = 0{,}550563$$
$$1{,}997721 = \log. 99{,}477$$
$$172{,}002 = 2\ Q.$$

Zweite Parcelle. $Q = 172{,}0;\ p'' = 4{,}8;\ v'' = 2.$

$$2\ Q = 344{,}0 \qquad q\ (a + v'') = 17{,}5 + 27 = 472{,}5$$
$$-\ a\ p'' = 139{,}2 \qquad +\ p''\ w = 28{,}2$$
$$\text{Zähler} = 204{,}8 \qquad \text{Nenner} = 501{,}3$$

$$\log.\ \text{des Zählers} = 2{,}311330$$
$$\log.\ \text{„ Nenners} = 2{,}700098$$
$$\log. \varphi = 9{,}611232 \qquad \varphi = 0{,}4085$$
$$\log. b = 1{,}267171$$
$$\log. B\ 2 = 0{,}878403 \qquad B\ 2 = 7{,}558$$
$$B\ 1 = 3{,}756$$
$$1\ .\ 2\ .\ . = 3{,}802$$

Proberechnung.

$$\log \varphi = 9{,}611232$$
$$\log. q = 1{,}243038$$
$$\log. q'' = 0{,}854270 \qquad q'' = 7{,}149$$

$$\log. \varphi = 9{,}611232$$
$$\log. w = 0{,}778151$$
$$\log. w'' = 0{,}389383 \qquad w'' = 2{,}451$$

$$\log. (a + w'') = 1{,}497634$$
$$\log. p'' = 0{,}681241$$
$$2{,}178875 = \log. 150{,}965$$

$$\log. (a - v'') = 1{,}431364$$
$$\log. q'' = 0{,}854270$$
$$2{,}285634 = \log. 193{,}134$$
$$344{,}099 = 2\,Q.$$

Dritte Parcelle. $Q = 258{,}0$; $p''' = 7{,}2$; $v''' = 3{,}0$.

Wir setzen des Raumes wegen die ausführliche Rechnung nicht mehr hieher.

Man findet

$$\log. \varphi = 9{,}790017 \qquad \varphi = 0{,}6166$$
$$B\,3 = 11{,}407$$
$$-\,B\,2 = 7{,}558$$
$$2\,.\,3 \ldots\ldots = 3{,}849$$

Vierte Parcelle. $Q = 344{,}0$; $p'''' = 9{,}6$; $v'''' = 4{,}0$.

$$\log. \varphi = 9{,}917667 \qquad \varphi = 0{,}8273$$
$$B\,4 = 15{,}305$$
$$B\,3 = 11{,}407$$
$$3\,.\,4 \ldots\ldots = 3{,}898$$

Fünfte und letzte Parcelle.

Die Coordinaten des Viereckes C E IV (4) sind bereits bestimmt worden, nämlich $p'''' = 9{,}6$; $v'''' = 4{,}0$; $q'''' = 14{,}478$; $w'''' = 4{,}964$. Der Inhalt des genannten Viereckes

soll betragen	=	76,0
hiezu das Dreieck C E D	=	10,0
letzte Parcelle	=	86,0 = *Q*.

Zur Probe berechnen wir den Inhalt des Viereckes aus den Corodinaten

(X IV + E F) = 21,6			
× (A F — A X) = 1,0	21,6		
(E F + C G) = 29,5			
× (A G — A F) = 30,0	885,0		
		906,600	
(C G + Y[4]) = 31,978			
× (A G — A Y) = 1,037	33,130		
(Y [4] + X IV) = 24,078			
× (A Y — A X) = 29,963	721,448		
		754,578	
	Unterschied	152,022 = 2 (Q — E C D).	

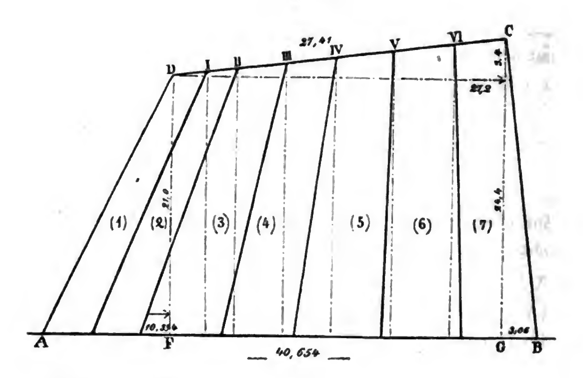
Zweites Beispiel.

Das Feld Fig. 47 soll in 7 Theile zerlegt werden und zwar nach folgenden Verhältnissen.

a) 2 Stücke zu je 3 Theilen	. .	6 Theile
b) 2 „ „ „ 5 „	. .	10 „
c) 3 „ „ „ 6 „	. .	18 „
Summa der Verhältnisstheile	. .	34

Inhalt des Ganzen = 776,3780 = J.

Fig. 47.



Hiervon erhält

jeder Theil	a) $^3/_{34}$	=	68,5038	macht	137,0076
„ „	b) $^5/_{34}$	=	114,1730	„	228,3460
„ „	c) $^6/_{34}$	=	137,0076	„	411,0228
					776,3764 = J.

Es wird ferner ausbedungen, dass jedes Stück eine seinem Inhalte entsprechende Breite an der Seite C D′ erhalten soll.

Da sich die Coordinaten dieser Seite auf die gegenüberstehende Grundlinie beziehen, kann die Rechnung nach der Formel (4) vollführt werden.

Vorbereitung. Berechnung der bedungenen Breiten.

log. $^3/_{34}$ = 8,945642
log. 27,41 = 1,437909
0,383551 = log. 2,4185

$$\begin{array}{rl} \log.\ {}^{5}/_{34} = & 9{,}167491 \\ \log.\ 27{,}41 = & 1{,}437909 \\ \hline & 0{,}605400 = \log.\ 4{,}0308 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ {}^{6}/_{34} = & 9{,}246672 \\ \log.\ 27{,}41 = & 1{,}437909 \\ \hline & 0{,}684581 = \log.\ 4{,}8370 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 2 \times 2{,}4185 = & 4{,}8370 \\ 2 \times 4{,}0308 = & 8{,}0616 \\ 3 \times 4{,}8370 = & 14{,}5110 \\ \hline & 27{,}4096 = \text{C D} \end{array}$$

Coordinaten der Theilpunkte.

Ordinaten y', y'' . .

des Punktes I. $21 + {}^{3}/_{34} \times 3{,}4 = 21{,}30$
" " II. $21 + {}^{6}/_{34} \times 3{,}4 = 21{,}60$
" " III. $21 + {}^{11}/_{34} \times 3{,}4 = 22{,}10$
" " IV. $21 + {}^{16}/_{34} \times 3{,}4 = 22{,}60$
" " V. $21 + {}^{22}/_{34} \times 3{,}4 = 23{,}20$
" " VI. $21 + {}^{28}/_{34} \times 3{,}4 = 23{,}80$
" " C $21 + {}^{34}/_{34} \times 3{,}4 = 24{,}40$

Abstände derselben von D F
oder Grössen von z', z'' . . etc.

${}^{3}/_{34} \times 27{,}2 = 2{,}40$
${}^{6}/_{34} \times 27{,}2 = 4{,}80$
${}^{11}/_{34} \times 27{,}2 = 8{,}80$
${}^{16}/_{34} \times 27{,}2 = 12{,}80$
${}^{22}/_{34} \times 27{,}2 = 17{,}60$
${}^{28}/_{34} \times 27{,}2 = 22{,}40$
${}^{34}/_{34} \times 27{,}2 = 27{,}20$

Die zweckmässige Gestalt der Stücke verlangt, dass man die kleineren an die kürzere Seite lege, also an A D, von wo auch die Theilung beginnt.

Erste Parcelle. $Q = 68{,}5038$; $z' = 2{,}40$; $y' = 21{,}30$.

$$\begin{aligned} 2\,Q &= 1370076 \\ -\,p\,(z' + v) &= 114{,}66 \\ \hline & 22{,}3476 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 22{,}3476 &= 1{,}349239 \\ \log.\ y' &= 1{,}328379 \\ \hline & 0{,}020860 = \log.\ 1{,}049 \\ & \phantom{= 0{,}020860} - z = 2{,}400 \\ & \phantom{= 0{,}020860} x = -\ 1{,}351 \end{aligned}$$

Untere Breite $a' = v + z' + x' = 5{,}46 - 1{,}351 = 4{,}109.$

Proberechnung.

$$\begin{aligned} \log.\ (a' - x) = \log.\ 5{,}46 &= 0{,}737192 \\ \log.\ p = \log.\ 21{,}0 &= 1{,}322219 \\ \hline & 2{,}059411\ .\ 114{,}660 = p\,(z - v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ (a' - v) = \log.\ 1{,}049 &= 0{,}020860 \\ \log.\ y' = \log.\ 21{,}30 &= 1{,}328380 \\ \hline & 1{,}349240\ .\ \ 22{,}348 \\ & \phantom{= 1{,}349240\ .\ } 137{,}008 = 2\ Q. \end{aligned}$$

Zweite Parcelle. $Q = 137{,}0076$; $z'' = 4{,}80$; $y'' = 21{,}60$.

$$\begin{aligned} 2\,Q &= 274{,}0152 \\ -\,p\,(z'' = v) &= 165{,}06 \\ \hline & 108{,}9552 \end{aligned}$$

$$\text{log. des Zählers} = 2{,}037248$$
$$\text{log. } y'' = 1{,}334454$$
$$0{,}702794 = \text{log. } 5{,}44$$
$$-z'' = 4{,}8$$
$$x'' = 0{,}244$$

$$a'' = v + z'' + x'' = 8{,}104.$$

Proberechnung.

$$(a'' - x'')\,p = 7{,}86 \times 21{,}0 = 165{,}06 \;.\;. = p\,(z'' + v)$$
$$(a'' - v)\,y'' = 5{,}044 \times 21{,}6 = 108{,}95$$
$$274{,}01 = 2\,Q.$$

Dritte Parcelle. $Q = 251{,}1806;\; z''' = 8{,}80;\; y''' = 22{,}10.$

$$2\,Q = 502{,}3612$$
$$-\,p\,(z''' + v) = 249{,}06$$
$$\text{Zähler} = 253{,}3012$$

$$\text{log. des Zählers} = 2{,}403637$$
$$\text{log. } y'' = 1{,}344392$$
$$1{,}059245 = \text{log. } 11{,}462$$
$$-z''' = 8{,}80$$
$$x'' = +\;2{,}662$$

$$a''' = v + z''' + x''' = 14{,}522.$$

Proberechnung.

$$(a''' - x''')\,p = 21{,}86 \times 21{,}0 = 249{,}06$$
$$(a''' - v)\,y''' = 11{,}462 \times 22{,}10 = 253{,}3102$$
$$502{,}3702 = 2\,Q.$$

Vierte Parcelle. $Q = 365{,}3536$; $z'''' = 12{,}80$; $y'''' = 22{,}60$.

$$2\,Q = 730{,}7072$$
$$-\,p\,(z'''' + v) = 333{,}06$$
$$\text{Zähler} = 397{,}6472$$

$$\log.\ \text{des Zählers} = 2{,}599499$$
$$\log.\ y'''' = 1{,}354108$$
$$1{,}245391 = \log.\ 17{,}596$$
$$-\,z'''' = 12{,}80$$
$$x'''' = +\ 4{,}796$$

$$a'''' = v + z'''' = 20{,}656.$$

Proberechnung.

$$(a'''' - x'''')\,p = 15{,}86 \times 21{,}0 = 333{,}06$$
$$(a'''' - v)\,y'''' = 17{,}596 \times 22{,}60 = 397{,}669$$
$$730{,}729 = 2\,Q.$$

Fünfte Parcelle. $Q = 502{,}3612$; $z''''' = 17{,}60$; $q''''' = 23{,}20$.

$$2\,Q = 1004{,}7224$$
$$-\,p\,(z''''' + v) = 433{,}86$$
$$\text{Zähler} = 570{,}8624$$

$$\log.\ \text{des Zählers} = 2{,}756531$$
$$\log.\ y''''' = 1{,}365488$$
$$1{,}391043 = \log.\ 24{,}606$$
$$-\,2''''' = 17{,}6$$
$$x''''' = +\ 7{,}006$$

$$a''''' = v + z''''' + = 27{,}666.$$

Proberechnung.

$(a'''' - x'''')\,p = 15{,}86 \times 21{,}0 = 433{,}86$
$(a'''' - v)\,y'''' = 24{,}606 \times 23{,}20 = 570{,}8592$

$1004{,}7192 = 2\,Q.$

Sechste Parcelle. $Q = 639{,}3688$; $z''''' = 22{,}40$; $y''''' = 23{,}80.$

$$2\,Q = 1278{,}7376$$
$$-\,p\,(z''''' + v''''') = 534{,}66$$
$$\text{Zähler} = 744{,}0776$$

$$\text{log. des Zählers} = 2{,}871622$$
$$\text{log. } y''''' = 1{,}376577$$
$$1{,}495045 = \text{log. } 31{,}264$$
$$-\,z'''' = 22{,}40$$
$$-\,x'''' = +\;8{,}864$$
$$a''''' = v + z'''' + x'''' = 34{,}324.$$

Proberechnung.

$(a''''' - x''''')\,p = 25{,}46 \times 21{,}0 = 534{,}66$
$(a''''' - v)\,y''''' = 31{,}264 \times 23{,}80 = 744{,}0832$

$1278{,}7432 = 2\,Q.$

Siebente und letzte Parcelle. $Q = 137{,}0076.$

Untere Breite $a''''' = 40{,}654 - 34{,}324 = 6{,}23.$

Proberechnung.

$(a'''''' - v)\,y'''' = -\;4{,}064 \times 23{,}80 = -\;96{,}7232$
$(a'''''' + x'''''')\,p = 15{,}194 \times 24{,}40 = +\;370{,}7336$

$274{,}0104 = 2\,Q.$

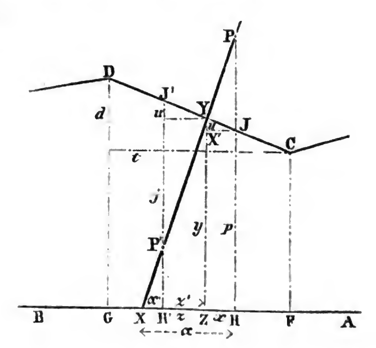
Zusammenstellung der unteren Breiten.

(1)	4,109 — 0	4,109
(2)	8,104 — 4,109	3,995
(3)	14,522 — 8,104	6,418
(4)	20,656 — 14,522	6,134
(5)	27,666 — 20,656	7,010
(6)	34,324 — 27,666	6,658
(7)	40,654 — 34,324	6,330

V. **Aufgabe.** *Von einem beliebigen Felde soll ein Stück in bestimmter Grösse abgeschnitten werden mittelst einer geraden Linie, deren Verlängerung durch einen Punkt ausserhalb der Figur geht.*

Mit Hilfe einer vorläufigen Untersuchung wird sich immer entscheiden lassen, welche Seiten des Feldes durch die Theilungslinie geschnitten werden müssen. Man kann dann die eine dieser Seiten als Axe annehmen und die Coordinaten des Grundstückes, sowie des Punktes, bezüglich auf diese Axe berechnen. Dies soll in Fig. 48 bereits geschehen seyn.

Fig. 48.



A B, C D sind die zwei Seiten, auf welche die Theilungslinie X Y trifft, deren Verlängerung durch den Punkt P geht. Die Ordinate P H des Punktes P scheidet das Feld in zwei Theile, deren Inhalt man berechnet; zu dem rechts liegenden Theil soll noch ein Viereck J H X Y gefügt werden müssen, damit das Ganze die verlangte Grösse habe. Somit steht unsere Aufgabe so: von dem Viereck J H G D soll durch eine gerade Linie, welche von P ausgeht, ein Stück J H X Y $= Q$ abgeschnitten werden.

Nehmen wir die Entfernung H X vorläufig als bekannt an, und setzen sie $= \alpha$, so handelt sich's den Durchschnittspunkt Y zu bestimmen, d. i. seine Coordinaten H Z $=$ x, Y Z $=$ y und hieraus zuletzt wieder α.

Weil, der Voraussetzung nach, F H bekannt seyn muss, findet sich vorerst $J\,H = C\,F + H\,F\,\frac{d}{t} = p$. Ferner sey $P\,H = \beta$; $Z\,X = \alpha - x = z$.

Dann ist, indem man Y als einen Punkt auf P X betrachtet

$$\cot.\; Y\,P\,H = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{z}, \text{ und } y = \frac{\beta\, z}{\alpha} \quad . \; . \; . \quad (a)$$

Y aber als Punkt auf C D betrachtend, ist

$$y = Z\,X' + X'\,Y = p + u;$$

Da nun $\frac{u}{x} = \frac{u}{\alpha - z} = \frac{d}{t} = k$ (S. 74) also $u = \frac{\alpha\, d - d\, z}{t}$

$$\text{so folgt } y = p + \frac{\alpha\, d - d\, z}{t} = \frac{\beta\, z}{\alpha}$$

$$\text{woraus } z = \frac{\alpha^2 d + \alpha\, p\, t}{\alpha\, d + \beta\, t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Sofort hat man für Q den Ausdruck

$$(\alpha - z)\, p + \alpha\, y = 2\, Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

Für y und z die Werte aus (a) und (b) eingeführt, ergibt sich:

$$\alpha\, p - \frac{\alpha^2\, d\, p + \alpha\, p^2\, t}{\alpha\, d + \beta\, t} + \frac{\alpha^2\, \beta\, d + \alpha\, \beta\, p\, t}{\alpha\, d + \beta\, t} = 2\, Q \quad (d)$$

$$\alpha^2\, \beta\, d + \alpha\,(2\, \beta\, p\, t - p^2\, t - 2\, d\, Q) = 2\, \beta\, t\, Q \quad . \quad (e)$$

oder

$$\alpha^2\, K + \alpha\, L = 2\, V\, Q.$$

und

$$\alpha = \frac{-\tfrac{1}{2}\, L + \sqrt{2\, V\, Q\, K + \tfrac{1}{4}\, L^2}}{K} \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

indem man nämlich die Coefficienten von α^2, α und Q wieder mit K, L, V bezeichnet.

Beispiele: Es sey $\beta = 25$, p = 12; D G = 22, daher d = 10; t = 24, C D = 26. Der abzuschneidende Theil $Q = 123$.

Hieraus folgt: $K = 250$. $L = 8484$. $V = 600$ und $\alpha = 12{,}668$.

$$\text{aus (b) } z = \frac{1604{,}87 + 5252{,}35}{126{,}68 + 726{,}68} = 7{,}228.$$

$$y = \frac{\beta\, z}{\alpha} = 14{,}264$$

Probe.

$$\alpha\, y = 180{,}70$$
$$(x - z)\, p = 65{,}28$$
$$2)\ 245{,}98 = 122{,}99 = Q.$$

$$\text{Man findet } J\, Y = \frac{C\, D \cdot J\, Y'}{F\, G} = \frac{26 \times 5{,}44}{24} = 5{,}89.$$

Zweitens. Der Punkt P könnte im Innern des Feldes gegeben seyn. Dies würde die Herleitung der Theilungsformel nur wenig ändern.

E sey Fig. 48 P′ innerhalb des Feldes der gegebene Punkt. Mit diesem ist auch der Fusspunkt H′ seiner Ordinate gegeben. Diese selbst heisse β', die bis J′ verlängerte Ordinate H′ J′ aber heisse j. Y P′ X sey die Theilungslinie. Nehmen wir x′ vorerst wieder als bekannt an, so handelt sichs den Durchschnitt Y zu bestimmen.

Es sey H′ X $= \alpha'$; H′ Z $=$ z′, dann ist, indem wir Y als einen Punkt auf X P′ betrachten;

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{y}{\alpha' + z'},\ \text{also}\ y = \frac{\beta'(\alpha' + z')}{\alpha'} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Aber als Punkt von C D findet sich für Y

$$y = j - u' \text{ und } u' = k\, z'$$

$$\text{also } j - k' z' = \frac{\beta' \alpha' + \beta' z'}{\alpha'}$$

und hieraus

$$z' = \frac{(j - \beta)\, \alpha'}{\beta' + k\, \alpha'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Man entwickelt nun, ganz nach demselben Gange, wie vorhin, eine Endgleichung für die Grösse α'.

Eine wirkliche Anwendung der vorstehenden Formeln wird wohl nicht häufig zu machen seyn; allein die Aufgaben zeigten abermals, wie leicht die Methode der Coordinaten sich auf alle vorkommenden Fälle der Feldertheilung anwenden lässt. In der „Feldmesskunst von *Umpfenbach*,“ einem Buche, das sich gerade durch eine gute Behandlung des rein mathematischen Theiles auszeichnet, finden sich Seite 330 über die vorstehenden zwei Aufgaben folgende Bemerkungen: „die strenge Auflösung dieser Aufgabe führt zu einer so complicirten Formel, dass sie schlech-

terdings für die Praxis untauglich erachtet werden muss." Dass der Verfasser mit den zwei Aufgaben nicht auf praktisch brauchbare Weise zurecht kommen konnte, liegt allein an der angewendeten Methode. Unsere Formel ist keineswegs länger oder verwickelter als die gewöhnlichen algebraischen Theilungsausdrücke, und wir hatten zu ihrer Herleitung keine besondern Kunstgriffe, keine Einführung künstlicher Hilfsgrössen oder Aehnliches nötig; dies sind in der Mathematik die Vortheile zweckmässiger und allgemeiner Behandlungsweise.

Anmerkung. Zu einer Theilung aus gegebenen Punkten wird man Veranlassung finden, wenn z. B. die Gränze D C (Fig. 47), worauf die Parcellen stossen sollen, den Eigenthümern Vortheile zuwendet, oder auch Lasten, wie zum Beispiel die Unterhaltung einer Einfriedigung, eines Wasserbaues etc. und dann wird, wie im vorstehenden Beispiel, verlangt werden, dass die Breiten I II, II III etc. den Flächenräumen der Parcellen proportional seyen. Auch da, wo die Unterschiede der Erdbreiten nicht sehr bedeutend sind, wie in Figur 46, gibt es eine gute Theilung, wenn man die kürzere Seite A E in gleiche, oder den Flächenräumen proportionale Theile zerlegt. Bei langen Feld- oder Wiesengewannen sucht man wohl immer die Paralleltheilung anzuwenden, allein häufig wird man am Anfang oder am Ende einigen Parcellen ungleiche Breite geben müssen, um allmählig in die gleiche Breite überzugehen. An diesen Endstücken ist dann wieder eine Theilung aus festen Punkten anwendbar, wenn man nicht eine symmetrische Theilung vorzieht.

§. 29.

Anwendung gebrochener Theilungslinien.

In den Fällen, wovon wir so eben gesprochen, kann es auch vorkommen, dass man, wegen zu geringer Breite der Parcellen,

jenen am Ende gebrochene Gränzen geben muss. Fig. 49 z. B. stelle das Ende einer Gewanne vor, welche bis an F K durch parallele Linien in Parcellen von gleicher Grösse abgetheilt worden ist. Den vier letzten Parcellen musste man nicht nur unten eine grössere Breite geben, sondern die Gränzen bei f, g, h noch brechen.

Fig. 49.

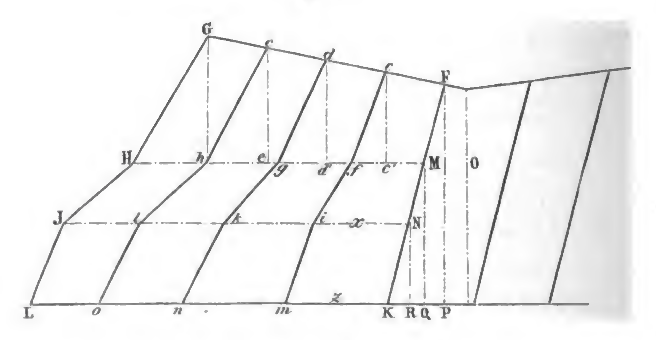
Hiezu hat man durch das Eck H zu J K eine Parallele gezogen und ihre Länge H M = R Q berechnet (da die Punkte F und P bekannt sind, findet sich $K Q = \frac{K P \cdot M Q}{F P}$).
Sofort wurde G F und H M, jedes in vier gleiche Theile getheilt, und die Theilungspunkte durch die Linien c f, d g verbunden. Man berechnete die Ordinaten und Abschnitte e e′ und h e′ . . . . und hieraus die Grössen der Vierecke H G e h, e h g d . . . .

Endlich berechnete man den zu jeder Parcelle noch gehörigen Theil H J l h, h l k g . . . . nach §. 26 (4). Waren die Parcellen an Grösse ungleich, so würde man die Theile G e,

e d . . . . H h, h g . . . . jenen Grössen proportional zu nehmen gehabt haben.

Die Figur 50 zeigt einen Fall, wobei die Theilungslinien zweimal gebrochen werden mussten. Man hat durch die Ecken H, J zu L K die Parallelen H M, J N gezogen, und die oberen Vierecke H G e h . . . . wie in Fig. 49 angeordnet und berechnet. Was nun die unteren Stücke M f i m K, f g k n m anbetraf, so konnte in mehrfacher Weise verfahren werden: man konnte z. B. die Breiten N i, i k . . . . willkührlich annehmen, und dann berechneten sich die untersten K N i m . . . . wieder nach §. 26 (4), oder aber, man konnte die Bedingung stellen, dass die Breiten N i, i k . . . ., K m, m n . . . . den Längen N J, K L proportional seyn sollten. Man setze zu diesem Zweck die bekannte Breite M f = f.

Fig. 50.



$$N\,i = x,\ K\,m = z,\ N\,J = j,\ K\,L = l,$$
die Höhen $N\,R = n \quad M\,Q - N\,R = m.$

So folgt:

$$\frac{x}{j} = \frac{z}{l};\ \text{also}\ z = \frac{l\,x}{j}$$

und $M f i m K = 2 Q = (f + x) m + \left(x + \frac{l x}{j}\right) n.$

Hieraus:

$$x = \frac{j (2 Q - m f)}{j (m + n) + l n}$$

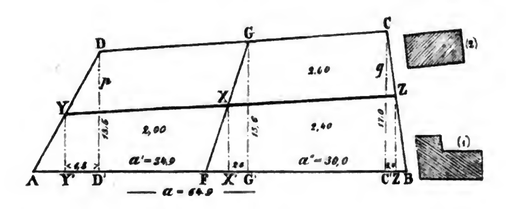
Drittes Buch.

Einige besondere Fälle.

§. 30.

I. Das Viereck A B C D (Fig. 51), welches durch die gerade Linie F G in zwei beliebige Theile zerlegt ist, soll durch eine andere Gerade Y Z noch einmal so getheilt werden, dass von jedem der zwei ersten Theile ein bestimmtes Stück A Y X F, F X Z B abgeschnitten wird.

Fig. 51.



Man setze $A B = a$; $A F = a'$; $F B = a''$.

Die Ordinaten von Y, X, Z = p, q, r;

cot. A = m; cot. B = n; cot. F = o . . . (§. 19. Seite 85)

wornach die Abschnitte $A\,Y' = m\,p$; $F\,X' = o\,q$; $B\,Z' = n\,r$ folgen.

Die Summen $m + o = \varsigma'$; $o + n = \varsigma''$; $m + n = \varsigma'''$ gesetzt.

Die Vierecke $A\,X = Q'$, $F\,Z = Q''$, $A\,Z = Q'''$.

Sofort den Durchschnittspunkt x, sowie seine Ordinate q als bekannt angenommen, hat man in dem Viereck A X

$$(a' - o\,q)\,p + (a' - m\,p)\,q = 2\,Q' \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

woraus

$$p = \frac{2\,Q' - a'\,q}{a' - \varsigma'\,q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

in dem Viereck F Z desgleichen

$$r = \frac{2\,Q'' - a''\,q}{a'' - \varsigma''\,q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Aber der Bedingung nach muss seyn:

$$(a - m\,r)\,p + (a - m\,p)\,r = 2\,Q'''.$$

Jetzt für p und r die Werte aus (b) und (c) eingeführt und reducirt, folgt:

$$q^2\,(a\,a'\,\varsigma'' + a\,a''\,\varsigma' - a'\,a''\,\varsigma''' - 2\,\varsigma'\,\varsigma''\,Q''' \ldots$$
$$+ 2\,q\,[(a''\,\varsigma''' + a\,\varsigma'')\,Q' + (a'\,\varsigma''' - a\,\varsigma')\,Q'' + \ldots$$
$$(a\,\varsigma'' + a''\,\varsigma')\,Q''' - a\,a'\,a'']$$
$$= 4\,\varsigma'''\,Q''\,Q' - 2\,a\,a''\,Q' - 2\,a\,a'\,Q'' + 2\,a'\,a''\,Q''' \text{ . (d)}$$

oder: die Coefficienten von q^2 und q mit K, L, den zweiten Theil mit V bezeichnet, also gesetzt

$$q^2\,K - 2\,q\,L = V$$

kommt

$$q = \frac{-L + \sqrt{K\,V + L}}{K}$$

Mittelst des Wertes von q folgten aus (b) und (c) die Werte von p und von z.

Die vorstehende Aufgabe scheint für die Mathematiker überhaupt interessant gewesen zu seyn, wenigstens is sie von *Lambert*, *Meyer Hirsch* und Andern behandelt worden In der „Theilungslehre“ von *Bleibtreu* findet sie sich auf folgenden Fall angewendet: Die Länderei B C G F gehört dem Hauseigenthümer (1). Die Länderei F G D A dem Hauseigenthümer (2), beide kommen dahin überein, die Gränze in die Richtung Y Z zu verlegen, so dass der Erste das Stück Z X C G von 200 □Ruthen gegen ein gleich grosses A F X Y des besseren Bodens abgibt, der zweite aber in unmittelbare Verbindung mit seinem Eigenthum komme.

Nach den beigeschriebenen Maassen ist F G C B $=$ 440,38, also A X $= Q' =$ 200; F Z $= Q'' =$ 240,38, A Z $= Q'$ $=$ 440,38.

$$s' = 0{,}2777;\ s'' = 0{,}3666;\ s''' = 0{,}311.$$

Somit $K = 414{,}4915$; $L = -\ 62465{,}384$; $V = -\ 885744{,}713$, und man findet:

$p' = 4{,}385$, also A Y $= 4{,}405$; $m\ p' = 0{,}487$; $r' = 9{,}844$; also B Z $= 10{,}034$; $n\ r' = 1{,}968$; $q' = 7{,}026$, $o\ q' = 1{,}171$.

Die Proberechnung aus diesen Coordinaten gibt

$$Q' = 199{,}97,\ Q'' = 240{,}379$$

Wäre nur verlangt, ein Viereck, Fig. 52, durch zwei gerade Linien in vier Stücke von gegebener Grösse zu zerlegen, so könnte man das Ganze zuerst durch eine Senkrechte auf die Grundlinie in zwei Theile theilen, deren jedes gleich wäre der Summe von 2 Stücken, und hierauf die Lage der zweiten Theilungslinie Y Z, wie oben festsetzen.

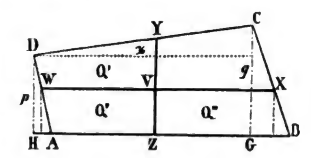
Man kann hier auch die Aufgabe stellen:

„*Das Viereck* A B C D *Fig.* **52** *soll durch zwei gerade Linien* W X, Y Z, *welche gegebenen Richtungen parallel*

sind und in vier Stücke von bestimmter Grösse vertheilt werden.“

Möglichst einfach zu bleiben, soll W X zu A B parallel und Y Z darauf senkrecht seyn.

Fig. 52.



Setzen wir Viereck W Y $= Q'$; Viereck A X $= Q'''$; die Höhe V Z $= y$; behalten übrigens die Bezeichnung des §. 16 und 19 bei.

Dies vorausgesetzt haben wir:

$$2\,ADYZ = pv + 2pz + kz^2 = 2Q' + 2Q'' \;..\; (1)$$
$$2\,AWVZ = 2yz + 2mpy - my^2 = 2Q'' \;........\; (2)$$
$$2\,AWXB = 2ay - sy^2 \qquad = 2Q''' \;......\; (3)$$

$$2\,ADYZ - 2Q'' = 2Q'.$$

oder aus (1) und (2) die Werte von 2 A D Y Z und 2 Q'' hierin substituirt

$$pv + 2pz + kz - 2yz - 2mpy + my^2 = 2Q' \;.\; (4)$$

aus (3) und (4) die Werte für y entwickelt und einander gleichgesetzt, folgt eine Gleichung für z aus bekannten Grössen, nämlich

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 2Q'''s}}{s} = \frac{-z - 2p \pm}{m}$$

$$\frac{\sqrt{mvp + 2mpz + mkz^2 - 2mQ' + (z + 2mp)^2}}{m}$$

oder: die Grösse unter dem Wurzelzeichen des ersten Gliedes $= W$ gesetzt.

$$s z + 2 s m p + m a - m \sqrt{W} =$$

$$s \sqrt{m v p + 2 m p z + m k z^2 - 2 m Q' + (z + 2 m p)^2}$$

auf beiden Seiten quadrirt und gehörig reducirt:

$$z^2 m k s + 2 z m s (a - p s - \sqrt{W}) = m s^2 p v + 2 m^2 (\sqrt{W} - a) (a + 2 p s) - 2 m s (m Q'' - s Q')$$

oder nach der allgemeinen Bezeichnung

$$z^2 K + 2 z L = V.$$

Den Wert von 2 hieraus entwickelt und in (2) eingeführt, findet sich die Grösse y.

Folgendes ist eine einfachere Art, ein länglichtes Viereck A B C (Fig. 51) durch eine Querlinie F G in zwei gleiche Theile zu zerlegen.

Man nehme G in die Mitte von C D an, und den Abstand B F $= b$ derart so an, dass die Proportion besteht

$$\frac{q + p}{p} = \frac{a}{b} = \frac{a p}{q + p};$$

denn aus dem ersten folgt $\frac{q}{p} = \frac{a - b}{b}$ oder $b q = p (a - b)$

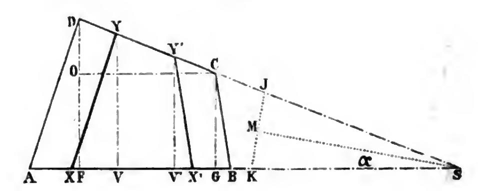
d. i. $\triangle$ B C F $=$ $\triangle$ F D A, da aber $\triangle$ C F G $=$ $\triangle$ G F D, so folgt $\square$ F G C B $=$ $\square$ F G D A.

Das Verfahren ist leicht, wie man sieht, doch müssen nothwendig bei F und G sehr schiefe Winkel entstehen, wenn anders der Unterschied des Perpendikels p und q nicht unbedeutend ist.

Aufgabe. Man soll ein Viereck dergestalt in zwei Theile von gegebener Grösse zerlegen, dass die Theilungslinie die kleinst mögliche Länge erhalte.

Zur Lösung bedürfen wir des Lehnsatzes: „die kleinste Linie, welche in einem Dreiecke ein Stück von gegebener Grösse abschneidet, liegt dem kleinsten der *drei* Winkel gegenüber, und so, dass das abgeschnittene Dreieck gleichschenklich ist."

Fig. 53.



A D S Fig. 53 sey das Dreieck, sein Flächenraum sey $= J$; sodann a, d die Seiten gegenüber von A und D. S sey der kleinste Winkel des Dreieckes; K J = x die gesuchte Theilungslinie und $J\,K\,S = \frac{1}{n}\,J$.

S M stehe senkrecht auf K J, und der Winkel M S K heisse α, dann ist $K = 100^g - \alpha$ und $J = 100^g - S + \alpha$.

Somit folgt als Seite J S des kleinen Dreieckes aus

$$\frac{J\,S}{x} = \frac{\sin. K}{\sin. (J + K)}$$

$$J\,S = \frac{x \sin. K}{\sin. (J + K)}$$

und sein Inhalt durch die Grundlinie und die anliegenden Winkel ausgedrückt.

$$J\,K\,S = \frac{x^2}{2} \frac{\sin. K \sin. J}{\sin. (K + J)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \text{ ad sin. S; der}$$

Bedingung nach.

Für K und J die obigen Werte eingeführt

$$\frac{x^2 \sin. (100^g - \alpha) . \sin (100^g - S + \alpha)}{\sin. S.} = \frac{1}{n} \text{ad} \sin. S.$$

Wegen $\sin. (100^g - \alpha) = \cos. \alpha$, und $\sin. (100^g - S + \alpha) = \cos. (S - \alpha)$, und weil

$\cos. A \cos. B = \frac{1}{2} \cos. (A - B) + \frac{1}{2} \cos. (A + B)$. (Nach S. 44) folgt

$$x^2 = \frac{\text{ad} \sin.^2 S}{n \frac{1}{2} \cos. (2\alpha - S) + \frac{1}{2} \cos. S.}$$

Soll ein x in diesem Ausdruck den kleinst möglichen Wert haben, so muss der Nenner grösstmöglich werden, welches offenbar geschieht, wenn $2\alpha - S = 0$, d. i. $\alpha = \frac{1}{2} S$, oder das Dreieck K J S gleichschenklich ist, w. z. B. w.

Es sey nun verlangt, man solle von dem Viereck A C (Fig. 53) ein Stück A X Y D von 300 ☐ abschneiden, so dass die Theilungslinie X Y auf die Seite A B stosse, und ein Kleinstes werde.

Zu diesem Ende ergänze man das Viereck zu einem Dreieck A D S und schneide von diesem ein gleichschenkliches Dreieck $Y S X = Q'$ ab, so dass der Ueberrest $D X = Q$. Die Seiten S X oder S Y sind dann $= \frac{\sqrt{2 Q'}}{\sin. S}$, weil man haben muss $\overline{S X}^2 \sin. S = 2 Q'$.

Es sey nun A B = 36,02; D C = 25,54; D F = 19,0; A F = 8,02; C G = 9,0; B G = 4,50. Hiernach hat man C O = 23,50; D O = 10,0 und es folgt:

S F = 44,65; S D = 48,526; S A = 52,67.

A D S = 500,36; Y S X = 500,365 — 300 = 200,365 = Q';

$\sin. S = \sin. D C O = \frac{16,0}{25,54}$

$$\log. 2\,Q' = 2{,}602852$$
$$-\ \log.\ \sin.\ S = 9{,}592779$$
$$\log. \frac{2\,Q'}{\sin. S} = 3{,}010073$$
$$1{,}505036 = \log. 31{,}99 = l.\ S\,X = l.\ S\,Y.$$

Somit

$$D\,Y = 48{,}53 - 31{,}99 = 16{,}54$$
$$D\,A = 52{,}67 - 31{,}99 = 20{,}68$$

Zur Proberechnung braucht man noch die Ordinate $Y\,V' = Y\,S \sin. S$; $X\,Y' = X\,S - V\,S = X\,S - Y\,S$.

$$\log.\ S\,Y = 1{,}505036$$
$$\log.\ \sin.\ S = 9{,}592779$$
$$\log.\ Y\,V = 1{,}097815$$

$$\log.\ S\,Y = 1{,}505036$$
$$\log.\ \cos.\ S = 9{,}963847$$
$$\log.\ S\,V = 1{,}468883 = \log. 29{,}436.$$
$$X\,V = 31{,}99 - 29{,}436 = 2{,}554.$$

Aus den nun bekannten Coordinaten von A X Y D berechnet sich dessen Inhalt zu 300,01 = Q.

§. 31.

Theilungen bei ungleicher Güte des Bodens.

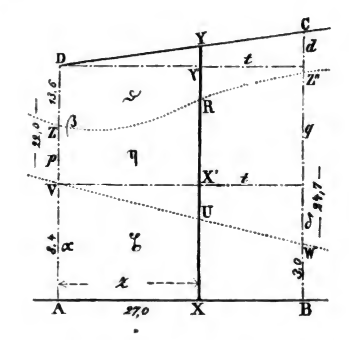
Bei all unsern bisherigen Theilungen war angenommen, dass das zu theilende Grundstück, ebenso jede Parcelle, überall die gleiche Ertragsfähigkeit besitze, es also auf die Grösse allein ankomme.

Indessen kann der Fall eintreten, dass die Güte des Bodens, und damit dessen Ertragsfähigkeit und Wert nicht nur in den verschiedenen Parcellen, sondern auch in einer und derselben

Parcelle verschieden sey, und dass diese Verschiedenheit bei der Theilung berücksichtigt werden müsse. Hier ist nun in der Regel die Frage nicht, den Parcellen ein gewisses Maass von jeder Bodenart zuzutheilen, sondern nur der Parcelle eine solche Grösse zu geben, dass sie einen bestimmten Wert habe.

Der Wert eines Grundstückes aber ist ein Produkt aus seiner Grösse in die Güte oder Ertragsfähigkeit. Hat man z. B. 80 Quadratruthen eines Bodens das Viertel zu 50 fl. taxirt, und 130 Ruthen eines Bodens, der zu 70 fl. das Viertel verkauft wird, so ist der Wert des einen Grundstückes $= 0{,}8 \times 50$ und der des andern $= 1{,}3 \times 70$, oder diese Werte verhalten sich wie 40 zu 91.

Fig. 54.



Angenommen A B (Fig. 54) sey ein Stück der untern Gränze, D C ein Stück der obern Gränze eines Geländes, dessen Gestalt durch Ordinaten auf die Grundlinie A B festgesetzt worden. Dies Gelände wird durch die Linie V W in zwei Theile von verschiedener Bodengüte zerlegt, und man setzt den verhältnissmässigen Wert des Bodens im untern Theil gleich 5, denselben Wert im obern Theil gleich 7. Es wird verlangt, man solle, rechts

der Ordinate A D, durch eine Parallele mit ihr, ein Stück abschneiden, dessen Wert nach obigen Voraussetzungen gleich 600 ist.

Setzen wir die Ordinate D A = p; die Stücke V A, V D gleich α und β; C B = q; α — B W = δ; A B = a. Die Theilungslinie X Y = y; ihren Abstand von A = z. Ferner die Verhältnisse

$$\frac{d}{t} = k; \ \frac{\delta}{t} = i \text{ und } i + k = s.$$

Hiernach ist der Abschnitt Y Y' = k z. U X' = i z und folglich U X = α — i z; U Y = β + k z + i z = β + s z.

Die Grösse von A X U V ist demnach ausgedrückt durch

$$(2\,\alpha - i\,z)\,\frac{z}{2}$$

Die Grösse von V U Y D durck . . . $(2\beta + s\,z)\,\frac{z}{2}$

und wenn man die Verhältnisszahlen 5, 7 mit $\varkappa$, λ bezeichnet, die Grösse 600 mit W; so folgt die Bedingungsgleichung.

$$\varkappa\,(2\,a - i\,z)\,z + \lambda\,(2\,\beta + s\,z)\,z = 2\,W \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

hieraus

$$z^2\,(\lambda\,s - \varkappa\,i) + 2\,z\,(\alpha\,\varkappa + \lambda\,\beta) = 2\,W.$$

$$z = \frac{-L + \sqrt{2\,W\,K + L^2}}{K}$$

indem man wie bisher die Coefficienten von z^2 und z mit K und L bezeichnet.

Nach den Angaben der Fig. 13 ist d = 2,7, daher k = 0,1
δ = 5,4 „ i = 0,2
ς = 0,3

Hiernach K = 1,1; L = 137,2 und z = 4,3.

Zur Proberechnung hat man s z $=$ 0,3 $+$ 5,3 $=$ 1,29, also Y U $=$ 13,6 $+$ 1,29 $=$ 14,89; i z $=$ 0,86 und

$$\text{U X} = 8{,}4 - 0{,}86 = 7{,}54.$$

Somit Werth

von U ... D $= (13{,}6 + 14{,}89) \times 4{,}3 \times 5 \ldots = 857{,}5$
„ U ... A $= (\ 8{,}4 + \ 7{,}54) \times 4{,}3 \times 5 \ldots = 342{,}7$

Summe . . . $= 1200{,}2 = 2\,W$.

Würde verlangt, dass das abzuschneidende Stück ein bestimmtes Maass von jeder Bodenart erhielte, so wäre die Aufgabe der von §. 30 Nro. 1 ganz ähnlich und man würde ohne grosse Mühe, nach unserer Berechnungsmethode die Lage der Theilungslinie festsetzen, wobei wir uns jedoch nicht aufhalten wollen.

In der Wirklichkeit kommt es wohl nicht vor, dass die verschiedenen Bodenarten scharf von einander getrennt sind, vielmehr wird immer ein allmählicher Uebergang von einer in die andere stattfinden, so, dass ein Annäherungsverfahren hinlängliche Schärfe gewährt.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel;

Das Gelände Fig. 54 werde durch die gerade Linie V W und durch die krumme Linie Z′ R Z″ in drei Theile von verschiedener Bodengüte ζ, η, δ, beziehungsweise gleich 5, 7, 8 zerlegt. Durch eine gerade Linie Y X soll ein Stück von gegebenem Wert $W = 700$ davon abgeschnitten werden. Die Figur sey in hinreichend grossem Maassstab aufgetragen.

Durch Construction bestimme man, in passender Lage, eine erste, annähernd richtige Theilungslinie, indem man dabei die Verschiedenheit des Bodenwerts ausser Acht lässt. Nun berechne man die einzelnen Stücke Z′ R Y D, Z′ R U V, V U X A, multiplicire jede mit der Zahl ihres verhältnissmässigen Wertes, und vergleiche die Summe der erhaltenen Produkte mit der Zahl W.

Angenommen, jene Zahl sey = 542, also um 158 = W' zu klein gefunden worden.

Man messe nun die Abschnitte X U, U R, R Y und multiplicire jede gefundene Länge mit der Zahl ihres zugehörigen Wertes ζ, η, δ. Die Abschnitte sollen sich ergeben haben zu 9,0 7,6 6,0, also die Summe der Produkte $9 \times 5 + 7{,}6 \times 7 + 6 \times 8 = 146{,}2$. Mit dieser Summe, welche man als den Wert der Linie X V betrachten kann, in die Zahl $W' = 158$ dividirt, gibt 1,08 als Quotient. In einer Entfernung von 1,08 Ruthen zieht man zu X Y eine Parallele, dies wird die verlangte Theilungslinie seyn, wenn man anders die kleinen Stücke an R Y, R U, U X als Parellelogramme betrachten darf. Wäre dies nicht so anzunehmen, so betrachte man die gefundene Theilungslinie als zweite Näherung, berechne wieder die einzelnen Bodenstücke welche sie abschneidet und sehe, was zu viel oder zu wenig genommen worden; in diesen Mangel oder Ueberschuss dividirt man jetzt mit dem Wert der *zweiten* Theillinie W''; der Quotient gibt den Abstand der abermals verbesserten Theillinie von der zweiten, und eine dritte Parallele in dieser Entfernung zur zweiten wird als die richtige betrachtet werden dürfen.

§. 32.

Vom Theilen eines größeren Verbandes von Grundstücken.

Wir haben gleich Eingangs der Anlässe Erwähnung gethan, welche dergleichen Arbeiten herbeiführen. Bei dem Vertheilen von Gemeinde- oder Allmendgütern handelt es sich oft, die ganze Flur- und Gewannordnung neu zu machen, Wege und Gräben anzulegen u. s. w. All dies wird man so einfach als möglich und sachgemäss anordnen. Schon bei der Aufnahme des Ganzen wird man Rücksicht nehmen, hinreichende feste Punkte zu erhalten, mittelst deren der gleichnamige Entwurf zur Theilung auf das Feld übertragen werden kann.

Das eigentlich Geometrische an solchem Theilungsgeschäft kann wohl weitläufig seyn, an sich aber bleibt es die einfachste Arbeit, weil man es überall nur mit ganz einfachen Verhältnissen und Figuren zu thun hat. Was aber häufig das Mühsame bei der Arbeit wird, ist die Ausmittelung des Theilungsfusses, d. h. des Maassstabes, wornach das ganze Gelände unter den Interessenten vertheilt werden soll; weil hier gar verschiedenartige Ansprüche geltend gemacht werden. Denn der Grundbesitz nebst all den Rechten und Unrechten, welche daran haften, ist zum Theil noch durchwachsen mit Ablegern und Ueberbleibseln aus jener langen Zeit, von da an, wo unsere Altvordern noch freie Besitzer waren, bis dahin wo jene Besitzer selbst Eigenthum, hörige Leute wurden, und bis herein in die neuere Zeit, wo wiederum eine andere Ordnung aufkam, und Gleichheit vor dem Gesetze zum *Grundsatze* geworden.

Wenn nun z. B. ein Stück Land, welches bisher als Waidgang benützt worden, unter die Gemeindeangehörigen vertheilt werden soll, so wird Einer von diesen verlangen, dass das Herkommen oder die bisherige Benützungsart zum Theilungsmaassstab genommen werde; ein Anderer wird haben wollen, die Grundsteuer soll maassgebend sein, ein Dritter wird nach den Häusern getheilt wissen wollen, und ein Vierter wird kein anderes Recht geltend machen können, als das seines Daseyns, so wie das billige Verlangen, nicht leer auszugehen, wenn Alle etwas erhalten.

Wenn nun Jeder seinen Anspruch begründen kann, so wird wiederum die Billigkeit erheischen, dass man diesem Anspruch Rechnung trage, d. h. dass man als Theilungsmaassstab denjenigen wähle, welcher sich als Mittelwert aus allen denen ergibt, die geltend gemacht worden sind.

Der sicherste Weg hiebei ist, Alles auf Geld zu reduciren, oder auf irgend eine andere Einheit.

Wir wollen unter vielen andern ein Beispiel wählen, welches

sich in *Benzenberg's* Geometrie findet. Drei Gemeinden wollen ein Allmendgut theilen, welches von ihnen als gemeinschaftliche Waide so benutzt worden war, dass die erste dasselbe vom Mai bis September mit 80 Stück Kühen betrieb, die zweite vom October bis zum Dezember mit 120 Schweinen, und die dritte vom Januar bis April mit 500 Schafen. Den Theilungsmaassstab auszumitteln, verfahre man so:

Man nimmt an, dass 5 Schafe so viel Futter als 2 Schweine oder 1 Kuh gebrauchen.

Die Gemeinde A trieb 80 Kühe ein, also soviel wie 400 Sch.
„ „ B „ 120 Schweine ein, „ „ 240 „
„ „ C „ 500 Schafe ein, „ „ 500 „

Nun hatte die Gemeinde A während 5 Monaten 400 Schafe, soviel wie in 1 Monat 2000 Stück.
Die Gemeinde B während 3 Monaten 240 . . 720 „
„ „ C „ 4 „ 500 . . 2000 „

Aber das Futter ist das ganze Jahr hindurch nicht gleich reichlich, und man rechnet 1 Sommermonat für 3 Wintermonate und 2 Herbstmonate. Daher hatte

die Gemeinde A 3 mal mehr Futter, also für 6000 Stück
„ „ B 2 „ „ „ „ „ 1440 „
„ „ C 1 „ „ „ „ „ 2000 „

Dies ist nun der Theilungsfuss. War im Ganzen ein Wert von 9440 Rthlr. zu vertheilen:

so erhielt die Gemeinde A davon 6000
„ „ „ „ B „ 1440
„ „ „ „ C „ 2000

Summe . . . 9440 Rthlr.

Da, wo der Grund und Boden im Wege der Ablösung von den sogenannten Feudallasten frei gemacht worden, hat dies Geschäft auch Zahlen geliefert, welche bei Theilungen maassgebend seyn können.

Nächst dem Theilungsmaassstab ist die Ermittlung des Bodenwertes hier ein wichtiges Moment.

Folgendes Verfahren dürfte sich als ganz zweckdienlich erweisen. Man lässt über das ganze zu theilende Gelände Quadrate abstecken, welche etwa 4 Morgen gross sind, und deren Seiten wo möglich in der Richtung der künftigen Theilungslinien liegen. Nachdem das Abstecken vollendet, geprüft und für richtig befunden, werden die Quadratseiten, da wo der Boden mit Holz bestanden ist, 3 bis 4 Fuss breit durchgehauen. Sofort wird der Boden in jedem Quadrat durch unpartheiische Schätzer taxirt, d. h. es wird angegeben, wie viel der Morgen im Quadrat wert ist; der Holzbestand wird desgleichen taxirt. Die Schätzungspreise und der hieraus sich ergebende Wert der Quadrate können in die Theilungspläne roth eingetragen werden, damit man sie immer vor Augen hat. Man pflegt den Boden, wenn er verschieden ist, in drei Klassen, gut, mittel und schlecht, zu theilen.

Jeder Interessent wird seinen verhältnissmässigen Antheil an der guten Bodenart haben wollen, und der Billigkeit nach auch an den andern nehmen müssen.

Wie die einzelnen Eigenthümer neben einander zu liegen kommen, wird meistens durch das Loos entschieden werden müssen. Ueber jeden Abschnitt der Arbeit wird ein rechtsgiltiges Protokoll aufgenommen, und zum Beweise der Zustimmung von den Interessenten unterzeichnet; auf diese Art sind Processe, die sonst nicht ausbleiben würden, von vornherein abgeschnitten.

Nun kann der Entwurf zur definitiven Theilung gemacht werden, welcher abermals von den Interessenten zu unterzeichnen, und wohl auch von der oberen Behörde zu genehmigen bleibt. Bei dem Theilen auf dem Papier, sowie beim Abstecken auf dem Feld muss der Geometer immer trachten, vom Grossen ins Kleine zu arbeiten. Er bestimmt zuerst die grossen Abtheilungen oder Gewannen; wenn diese sich als richtig erweisen, werden die Scheidelinien für eine Anzahl von zehn, zwölf Par-

cellen zusammen festgelegt, und dann erst die Einzelnen abgetheilt.

Das Zusammenlegen oder Zusammenwerfen, Consolidiren, Renoviren einer Gemarkung ist eines der Geschäfte, welche voraussichtlich immer häufiger vorkommen werden, dem damit beauftragten Geometer aber Gelegenheit geben, sich allseitig als tüchtigen Mann zu erweisen.

Viele Gemarkungen sind nämlich im Verlauf der Zeit durch Erbschaft, Kauf und Heirathen in so kleine Grundstücke zerschnitten worden, dass der Bauer auf vielen kaum mehr mit dem Pflug umwenden kann. *)

Man macht Gemeinden namhaft, in denen mancher Bauer, welcher zwei Ochsen hat, auch 200 über die ganze Gemarkung zerstreute Grundstücklein besitzt. Dabei liegen die Stücke so durcheinander, dass man, trotz der vielen Raine und Feldwege, zu manchen doch nicht anders kommen kann, als über des Nachbars Grundstück. Wie sehr dies den Ackerbau benachtheiligt, durch Zeitverlust beim Verschleppen des Ackergeräths von einem Stück auf das andere, durch die Unterhaltung der vielen Gränzen, und daher rührenden Streitigkeiten, durch den Verlust an nutzbarem Boden, wegen der vielen Gränzfurchen, leuchtet ein; das Schlimmste aber ist der, aus all diesen Verhältnissen entstandene Flurzwang, welcher jeden einzelnen Gemarkungsangehörigen nötigt, auf seinen verschiedenen Aeckern immer nur dasjenige zu bauen, was nach dem herkömmlichen Wechsel in in den verschiedenen Distrikten der Feldmark von allen gleichzeitig gebaut wird.

All diesem zu begegnen, gibt es kein anderes Mittel, als die ganze Flur-, Gewannen- und Parcelleneintheilung der Gemarkung neu, und dem Bedürfniss entsprechend zu machen.

*) In einer hier benachbarten Gemarkung kommen Gewannen vor mit Parcellen, deren an 80 auf einen Morgen gehen.

Folgendes mögen die Hauptmomente des Geschäftes seyn:

1) Aufnahme der Gemarkung im Massstab von $^1/_{10000}$ mit allen Flur- und Gewanngränzen, aber ohne die einzelnen Stücke.
2) Aufnahme der Gewannen und Parcellen im Maassstab von $^1/_{1000}$, oder wo die Stücke sehr klein sind, im Maassstab von $^1/_{500}$.

Diesen beiden Arbeiten muss begreiflich die genaue Begränzung der Gewannen, wie der Parcellen vorangehen, welches durch die Gemeindeangehörigen selbst besorgt werden kann.

3) Festsetzung über die Art der neuen Eintheilung, darüber nämlich, welche Gattung von Grundstücken zusammengelegt und neu getheilt werden soll. Project der neuen Gränzen, Feldwege, Abzugsgräben etc.

Meistens wird der Boden in drei Klassen, gut, mittel, schlecht, getheilt und ist jeder Grundbesitzer bei jeder Klasse verhältnissmässig betheiligt. Häufig wird auch zunächst des Dorfes ein sogenannter *Etter* zu Gartenpflanzen angelegt. Das Geschäft wird besorgt von einer Commission, aus dem Geometer, und einigen sachverständigen Ortseinwohnern gebildet. Ueber die Verhandlungen wird ein Protokoll geführt, und darin auch alle Bemerkungen, Einreden etc. der Interessenten aufgenommen.

4) Abschätzung des Wertes an Grundeigenthum für jeden Angehörigen.

Diese Abschätung wird zweckmässig wieder geschehen mittelst Quadraten von 10 oder 20 Ruthen zur Seite, welche über die ganze Gemarkung abgesteckt werden, möglicht in der Richtung der neuen Theilungslinien. Zwei unparteiische Abschätzer geben an, was der Boden in jedem Quadrat, dem Morgen nach, Wert sey. Aus diesen Angaben, aus den Flurkarten und zugehörigem Messregister folgt dann der Wert an Grundeigenthum für jeden Eingesessenen. Es wird hierbei wieder alles in Geld, z. B. in Gulden und Dezimaltheilen des Guldens ausgedrückt.

Dieser Wert kann nun noch vermehrt werden, z. B. durch das Eingehen alter Wege, Vertheilung unbenutzter Plätze; er kann auch aus ähnlichen Gründen verringert werden; das Endresultat aber ist der *Theilungsmaassstab,* d. h. das Verzeichniss des, jedem Interessenten zukommenden verhältnissmäsigen Antheils an dem Gesammtwert der Markung.

Wie die einzelnen Grundstücke neben einander zu liegen kommen, entscheidet am besten das Loos.

5) Nachdem die neue Theilung auf dem Papier vollendet und über diese eine Tabelle aufgesetzt ist, wird dies Project wieder von allen Interessenten unterzeichnet, nötigenfalls der höheren Behörde zur Genehmigung vorgelegt, und wenn diese erfolgt ist, zu dem Abstecken und Durchpflügen der neuen Grenzfurchen geschritten.

Bei dem ganzen Geschäft muss man stets Alles zu beseitigen suchen, was zu Processen Anlass geben könnte. Insbesondere hat der Geometer sich zu bestreben, seine Plane, Rechnungen, Tabellen etc. möglichst klar und übersichtlich zu führen.

6) Der Kostenpunkt ist bei solchem Zusammenlegen einer Gemarkung etwas höchst Wesentliches. Denn wenn das Geschäft nicht gut angelegt, mit Besonnenheit und Ausdauer geführt wird, so können die Kosten bedeutend werden, und Jahre hingehen, bis Alles vollendet ist.

Es sind uns Fälle bekannt, wo das Zusammenlegen nicht all zu grosser Gemarkungen über zwanzig Jahre dauerte. Was da, nebst den Rechnungen des Geometers, der Steinsetzer u. s. w., an Gebühren und Processkosten aufgegangen ist, lässt sich denken.

In Bezug auf die Kosten also nehme man zur Regel, dass nichts *tageweis* bezahlt wird, als die Begränzung, und dies kann, wie gesagt, die Gemeinde selbst vornehmen. *Benzenberg* a. a. O. gibt folgenden Satz als Maassstab für die Bezahlung.

Die Gemarkeintheilung kann dem Geometer zu 12 Rthlr. (18 fl.) für jedes hundert metrische Morgen (Hektaren) in Akkord gegeben werden. Hiefür hat er seine Arbeiter zu stellen und liefert eine rein gezeichnete Karte im Maassstab von $^1/_{1000}$.

Für jeden Gränzstein, den er setzt, erhält er 36 Kreuzer, die Steine selbst werden von der Gemeinde beigeschafft.

Bei Gewannvermessung bekommt der Geometer 30 Kreuzer für jede Parcelle, sie sey gross oder klein.

Für das Abstecken der Quadrate und das Protokollführen beim Abschätzen erhält er wieder 10 Rthlr. für jedes hundert Morgen; eben so viel erhalten die beiden Abschätzer.

Für das Abtheilen erhält er für jeden Morgen 30 Kreuzer, und für jeden Stein, den er auf die neuen Grenzen setzt, 36 Kreuzer.

Nach diesen Preisen (welche allerdings vor 30 Jahren festgestellt worden), wofür alle Arbeiten fertig geliefert werden, und keine Nebenrechnungen stattfinden, wird der metrische Morgen auf ungefähr 2 Gulden kommen. Genau lässt es sich nicht bestimmen, weil parcellenweis bezahlt wird, also die Kosten von der grösseren oder geringeren Zerstückelung des Bodens abhängen.

Fr. Redtenbacher,

d. Hofrath und Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

…egungs-Mechanismen. Darstellung und Beschrei… eines Theiles der Maschinen-Modell-Sammlung der polytechnischen Schule in Carlsruhe. Mit 60 lithographirten Tafeln. Quer Folio in Mappe. 10 Thlr. = 17 fl. 30 kr.

Resultate für den Maschinen-Bau. Mit einem Atlas von 11 lithographirten Figuren-Tafeln. *Dritte erweiterte Auflage.* gr. 8°. 5 Thlr. = 8 fl. 40 kr.

Die Gesetze des Lokomotiv-Baues. Mit einem Atlas von 18 lithographirten Figuren-Tafeln. gr. 4°. 4 Thlr. 24 Sgr. = 8 fl.

Theorie und Bau der Turbinen und Ventilatoren. Mit 6 kleinen lithographirten Tafeln. gr. 8°. und einem Atlas von 11 Tafeln in grosstem Imperial-Format. 7 Thlr. = 12 fl.

Theorie und Bau der Wasser-Räder. Mit 6 kleinen lithographirten Tafeln. gr. 8°. und einem Atlas von 23 Tafeln in grösstem Imperial-Format. 10 Thlr. = 17 fl. 30 kr.

Principien der Mechanik und des Maschinen-Baues. Mit 5 lithograph. Tafeln. gr. 8°. 2 Thlr. 20 Sgr. = 4 fl. 30 kr.

Die Calorische Maschine. Mit 6 lithographirten Tafeln. *Zweite vermehrte Auflage.* gr. 8°. 1 Thlr. = 1 fl. 45 kr.

Atlas für Handel und Industrie.

Für Kaufleute, Fabrikanten und Gewerbtreibende, Handels- und Gewerb-Schulen, polytechnische Lehr-Anstalten u. s. w., entworfen, gezeichnet und mit erläuterndem Text versehen von **C. F. Baur. 22 illuminirte Karten und Text** in quer gross Folio.

Subscriptions-Preis 3 Thlr. 22 Sgr. = 6 fl. 40 kr.

